Examen de Mathématiques Discrètes

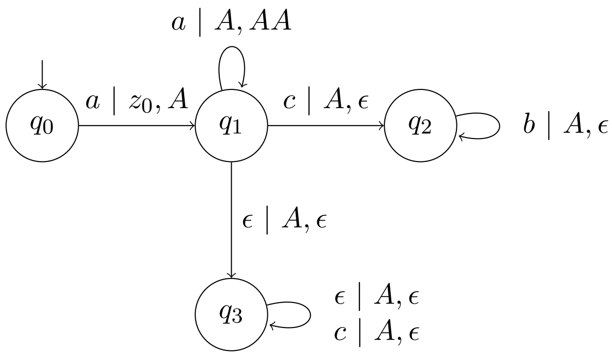
Mardi 13 janvier 2012

Durée : 3 heure

Seules les notes de cours et de td sont autorisées.
Les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : Langage algébrique (2 points)
Montrez que le langage $L = \{a^n(b+c)^m \ / \ m > n \geqslant 0\}$ est algébrique.

Exercice 2 : Automate à pile et langage (4 points)
Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ qui accepte par pile vide :



Question 1 : L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?

Question 2 : Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 4, acceptés par $\mathcal{A}$.

Question 3 : Quel est le langage $L_{\mathcal{A}}$ des mots acceptés par $\mathcal{A}$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 : Grammaire et langage (5 points)
Soit la grammaire algébrique $G = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathcal{P})$ où $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{V} = \{R, S, T, U, V\}$ et

$$\mathcal{P} : \left\{ \begin{array}{lcc} R & \rightarrow & RaRb + ST + T \\ S & \rightarrow & aS + a \\ T & \rightarrow & TV + c + \epsilon \\ U & \rightarrow & bU + b \\ V & \rightarrow & dV + d \end{array} \right.$$

Toutes les étapes de transformation des grammaires doivent être décrites et expliquées.

Question 1 : Donnez la grammaire G', réduite vis-à-vis de R et équivalente à G.

Question 2 : Donnez une grammaire propre G'' engendrant le langage $L_R(G) \setminus \{\epsilon\}$.

Question 3 : Décrivez le langage $L_R(G'')$. Justifiez votre réponse.

Question 4 : Donnez une grammaire en forme normale de Greibach équivalente à G''.

Exercice 4 : Complexité (5 points)
Soit la complexité c_n, $n \geqslant 0$, en nombre d'unions de la fonction `f(n)` définie de la façon suivante :

```
f(n){
 a = vide;
 if(n==1)
   a = union({(0,0)}, a);
 if(n>2){
   for(p=1;p<=n-2;p++){
     for(i in f(p)){
       q=n-1-p;
       for(j in f(q))
         a = union({(i,j)}, a);
     }
   }
 }
 return a;
}
```

Question 1 : Montrez que la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence non linéaire suivante :

$$c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 0 \text{ et } c_n = \sum_{p=1}^{n-2} c_p c_{n-1-p}, \forall n \geqslant 3.$$

Question 2 : Soit $C(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$, la série génératrice de la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$. Déduisez de la question précédente une équation fonctionnelle vérifiée par la série génératrice $C(z)$. Déduisez-en une expression en fonction de z pour $C(z)$.

Question 3 : Déduisez de la question précédente une expression en fonction de n pour la suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 5 : Série génératrice (4 points)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui vérifie la récurrence suivante :

$$u_0 = 0, u_1 = 4, u_2 = -8 \text{ et } nu_n = -3(n-1)u_{n-1} + 4(n-2)u_{n-2}, \forall n \geqslant 3.$$

Question 1 : Soit $U(z) = \sum_{n\geqslant 0} u_n z^n$, la série génératrice de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Explicitez une équation fonctionnelle vérifiée par la dérivée de la série génératrice $U(z)$. Déduisez-en une expression en fonction de z pour $U(z)$.

Question 2 : Déduisez de la question précédente une expression en fonction de n pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.