Exercice 1 On considère un système formé de six machines : elles sont identiques, ont une même probabilité p de fonctionnement et peuvent être reliées soit en *série*, soit en *parallèle*. Les fonctionnements des différents appareils sont supposés indépendants. Calculer la probabilité de fonctionnement du système selon son architecture.

Exercice 2 On considère des mains de cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Calculer le nombre de mains contenant exactement un roi, deux dames et deux as.
2. Calculer le nombre de mains contenant exactement un roi et deux dames.
3. Calculer les probabilités associées.

Exercice 3 On lance une pièce de monnaie deux fois de suite et on considère les trois évènements suivants :
$A =$ "la première fois, la pièce tombe sur pile",
$B =$ "la deuxième fois, la pièce tombe sur face",
$C =$ "les deux fois, la pièce tombe du même côté".
Montrer que les évènements sont deux-à-deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 4 On jette un dé deux fois. On suppose qu'il n'est pas pipé. On considère les trois évènements suivants :
$A =$ "obtenir au deuxième jet un 1, un 2, ou un 5",
$B =$ "obtenir au deuxième jet un 4, un 5, ou un 6",
$C =$ "obtenir un total de 9 en faisant la somme des deux jets".
Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 5 On jette une pièce deux fois. On suppose qu'elle n'est pas trafiquée. On considère les trois évènements suivants :
$A =$ "obtenir face au premier jet",
$B =$ "obtenir face au deuxième jet",
$C =$ "obtenir strictement une fois face sur les deux jets".
Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 6 Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On considère les deux évènements suivants :
$B_1 =$ "obtenir une boule blanche au premier tirage",
$B_2 =$ "obtenir une boule blanche au second tirage".
Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 7 Soit Ω_k l'espace des familles ayant k enfants. On considère les évènements
$A =$ "au plus une fille",
$B =$ "au moins un garçon et une fille".
Étudier l'indépendance de A et B dans chacun des univers Ω_k pour $k \geq 2$.

Exercice 8 On lance k dés cubiques équilibrés. Calculer pour chaque valeur de k la probabilité d'obtenir un 2 sachant que le résultat du lancer a donné k nombres différents.

Exercice 9 Les patients d'un ophtalmologue sont myopes à 70%. On sait que 40% des myopes sont astigmates et que 20% des patients qui ne sont pas myopes sont astigmates. Calculer la probabilité qu'un patient astigmate soit myope.

Exercice 10 Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte un douzième de malades. Parmi les malades, il y a quatre non-vaccinés pour un vacciné. Calculer la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade.

Exercice 11 Avant de passer un examen, 90% des candidats ont révisé. La probabilité de réussite est 0,8 pour un candidat ayant révisé et 0,2 pour un candidat n'ayant pas révisé. Après l'examen, tous les reçus affirment qu'ils n'avaient pas révisé, tous les recalés affirment qu'ils avaient travaillé jour et nuit.

1. On rencontre un candidat qui a réussi l'examen. Calculer la probabilité qu'il mente.
2. Même question pour un candidat ayant échoué.
3. Même question pour un candidat dont on ne sait pas s'il a réussi ou non.

Exercice 12 À Grosland, il fait beau cinq jours par semaine. Pour connaître le temps qu'il fera, chacun a deux sources d'information : la météo groslandaise qui a raison à 95% et son petit doigt qui a raison a 90%. La météo annonce du mauvais temps et le petit doigt du beau temps, calculer le temps le plus probable.

Exercice 13 Un fumeur essaye de réduire sa consommation. On admet qu'il fonctionne selon deux conditions :

C_1 : S'il reste un jour sans fumer, alors il fume le lendemain avec une probabilité de 0,4.
C_2 : S'il cède et fume un jour, alors la probabilité qu'il fume le lendemain est de 0,2.

On note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour. Déterminer la limite de p_n et conclure.

Exercice 14 Certains gènes peuvent avoir deux états : A (allèle dominant) ou a (allèle récessif). Les couples de gènes sur des paires de chromosomes n'ayant pas forcément les mêmes allèles, un individu donné peut avoir l'un des trois génotypes suivants : AA ou Aa ou aa. Lors d'un appariement entre deux individus, l'enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents. On note p_n, q_n, r_n les proportions des génotypes AA, Aa, aa.

1. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, représenter tous les cas possibles d'appariements et les génotypes de l'enfant qui en découlent.
2. En déduire les proportions p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n.
3. On note $\alpha = p_0 - r_0$.
   (a) Montrer $p_n - r_n = \alpha$ pour tout $n \geq 0$.
   (b) En déduire, pour tout $n \geq 0$, une expression de p_{n+1}, r_{n+1} puis q_{n+1} en fonction du seul paramètre α. En déduire que, pour $n \geq 1$, les suites $(p_n), (q_n)$ et (r_n) sont constantes.

Exercice 15 On considère une population Ω. Sur chaque individu de cette population, on étudie deux caractères A et B.

1. Représenter de deux façons cette situation de double partition.
2. Démontrer que la connaissance de 3 probabilités parmi les suivantes permet de déterminer toutes les autres :
$$P(A), P(B), P_A(B), P_{\overline{A}}(B), P_B(A), P_{\overline{B}}(A).$$

Exercice 16 Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement des boules de cette urne de la façon suivante :
– lorsque l'on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne,
– lorsque l'on tire une boule noire, on la remet dans l'urne et on ajoute aussi une autre boule noire.

1. Calculer la probabilité de tirer k boules blanches et la probabilité de tirer k boules noires.
2. Calculer la probabilité de tirer à nouveau une boule blanche sachant que l'on a déjà tiré k boules blanches.
3. Calculer la probabilité de tirer à nouveau une boule noire sachant que l'on a déjà tiré k boules noires.
4. Calculer la probabilité de tirer exactement une boule noire au cours de k tirages.