Éléments de probabilité : interrogation 2

L2 informatique, groupe 3 – durée : 1h
Documents et calculatrice interdits

Le 18 mars 2011

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *(4 points)*

Une armoire possède 6 tiroirs numérotés de 1 à 6, chacun étant composé de deux compartiments numérotés 1 et 2 (chaque compartiment contient des paires de chaussettes). On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est deux fois celle d'obtenir pile.

Pour choisir un tiroir et un compartiment, on lance le dé pour obtenir le numéro du tiroir, puis on lance la pièce : si elle tombe sur pile, on choisit le compartiment 1, sinon le compartiment 2. Soit X la variable aléatoire égale à la somme du numéro du tiroir et du numéro du compartiment.

1. Donner, en la justifiant, la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 2 *(6 points)*

Pour l'examen du code de la route, les candidats doivent remplir un questionnaire de 40 questions en choisissant pour chacune d'elles l'une des 4 réponses proposées, dont une et une seule est exacte. Un candidat totalement ignorant décide de tenter sa chance en cochant complètement au hasard une réponse pour chaque question.

1. Déterminer la loi du nombre S de bonnes réponses du candidat. Calculer son espérance.
2. Calculer $P(S \geq 38)$, c'est-à-dire la probabilité qu'il réalise au plus deux fautes. En donner une valeur approchée.
3. En utilisant l'inégalité de Markov, majorer $P(S \geq 38)$. Commenter.

Exercice 3 *(10 points)*

À certains jeux de société, les joueurs avancent d'un nombre de cases égal à la somme des points de deux dés. De plus, un joueur rejoue tant qu'il obtient un double (c'est-à-dire que chaque dé donne le même nombre de points). Il passe la main après le premier lancer sans double. On s'intéresse au nombre total de cases parcourues au cours du tour d'un joueur.

Lors du tour d'un joueur, pour $i \geq 1$, on note D_i l'événement "le i-ème lancer a lieu et donne un double" (on a donc $D_i \subseteq D_{i-1}$). On note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le i-ème lancer n'a pas lieu, et à la somme des points du i-ème lancer sinon.

1. Donner la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.
2. Calculer $P(D_1)$, $P(D_i|D_{i-1})$ et trouver une relation de récurrence entre $P(D_i)$ et $P(D_{i-1})$. En déduire l'expression explicite de $P(D_i)$ en fonction de i.
3. Pour $i \geq 2$, calculer $P(X_i = k|D_{i-1})$ et $P(X_i = k|\overline{D_{i-1}})$ en distinguant les cas $k = 0$ et $k > 0$. On pourra utiliser la valeur $P(X_1 = k)$.
4. En déduire une relation simple entre $P(X_i = k)$ et $P(X_1 = k)$ pour $k > 0$, puis entre $E(X_i)$ et $E(X_1)$.
5. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que $E(S_n)$ converge vers 8,4 lorsque n tend vers l'infini. Interpréter.