

# Éléments de probabilité : correction de l'interrogation 4

L2 informatique, groupe 3

Le 6 mai 2011

## Exercice 1

1. On peut dessiner un arbre.  $P(\text{olives}) = 8/9 \times 1/4 + 1/9 \times 2/3 = 2/9 + 2/27 = 8/27$ .
2.  $P(\text{gauchère} \mid \text{olives}) = P(\text{olives} \mid \text{gauchère})P(\text{gauchère})/P(\text{olives}) = (2/3 \times 1/9)/(8/27) = 1/4$ .

## Exercice 2

1.  $E(\text{gain}) = -3 + 10^6 \times 10^{-6} = -2$  : en moyenne chaque joueur perd 2 euros.
2. Loi du nombre de gagnants  $N$  : binomiale de paramètres  $n = 100\,000$  et  $p = 10^{-6}$ . Gain de la FdJ :  $X = 300\,000 - 10^6 N$  ; espérance  $E(X) = 300\,000 - 10^6 E(N) = 200\,000$ .
3. (a) Soit  $Y$  les réserves, il faut que  $Y \geq 10^6 N$  avec probabilité  $\geq 1 - 2.10^{-4}$ . Par Tchebychev,  $P(N \geq k) \leq P(|N - 1/10| \geq k - 1/10) \leq \text{Var}(N)/(k - 1/10)^2 \simeq 1/(10k^2)$ . On veut que  $1/(10k^2) \leq 2.10^{-4}$ , soit  $k^2 \geq 500$  ou encore  $k \geq 23$ . Il y a au plus 23 gagnants avec probabilité  $\geq 1 - 2.10^{-4}$  donc les réserves de la FdJ doivent être de 23 millions d'euros d'après Tchebychev.  
(b) Approximation de  $N$  par la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np = 1/10$  : la probabilité qu'il y ait au plus 2 gagnants est alors  $e^{-1/10}(1 + 1/10 + 1/200) = 221/(200e^{-1/10}) \simeq 221/221,03 = 1/(1 + 0,03/221) \simeq 1 - 0,03/221 \geq 1 - 2.10^{-4} = 0,9998$ . Ainsi, il suffit de couvrir 2 gagnants, soit des réserves de 2 millions d'euros.  
(c) Le résultat avec l'approximation de Poisson est bien meilleur : avec Tchebychev on avait largement surestimé les besoins.

## Exercice 3

L'algorithme  $B$  donne la mauvaise réponse si  $A$  se trompe au moins 2 fois sur les trois. Ainsi  $P(B \text{ se trompe}) = \binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3 = p^2(3-2p)$ . Pour  $p = 1/3$ , la probabilité d'erreur de  $B$  est donc  $1/9(3 - 2/3) = 7/27$ .