Interrogation 1 – correction

EP4 – L2 informatique, groupe 3

Le 15 février 2011

Exercice 1

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ donc $P(B) = 5/8$; $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 3/8$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1/8$.
2. $P(A \cap B) \leq P(B) = 1/2$ et $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 1/10$; $P(A \cup B) \leq 1$ et $P(A \cup B) \geq P(A) = 3/5$.
3. Non car $P(A \cap B) = P(A) > P(A)P(B)$ puisque $P(A) > 0$ et $P(B) < 1$.
4. Si A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$, donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exercice 2

1. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$ et $|\Omega| = 6^n$.
2. À chaque lancer, on obtient ≤ 2 avec probabilité $1/3$, donc par indépendance des lancers, aux n lancers on n'obtient que des valeurs ≤ 2 avec probabilité $(1/3)^n$. Ainsi, la probabilité d'obtenir au moins une valeur ≥ 3 est $1 - (1/3)^n$.
3. $\binom{n}{k}/2^n$.
4. Probabilité de n'obtenir aucun nombre ≥ 4 : $1/2^n$. Probabilité d'en obtenir exactement un : $n/2^n$. Ainsi, probabilité d'obtenir au moins deux fois un nombre ≥ 4 : $1 - (n+1)/2^n$. On veut donc $(n+1)/2^n \leq 1/10$, ce qui est vrai à partir de $n = 7$: il faut au moins 7 lancers.

Exercice 3

1. $\Omega = \{J, R, N\}^3$ et $|\Omega| = 3^3 = 27$.
2. $P(A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2) + P(A_3|A_1 \cap \bar{A}_2)P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(A_3|\bar{A}_1 \cap A_2)P(\bar{A}_1 \cap A_2) + P(A_3|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = (j-2)/(j+r+n-2) \times j(j-1)/((j+r+n)(j+r+n-1)) + (j-1)/(j+r+n-2) \times j(r+n)/((j+r+n)(j+r+n-1)) + (j-1)/(j+r+n-2) \times (r+n)j/((j+r+n)(j+r+n-1)) + j/(j+r+n-2) \times (r+n)(r+n-1)/((j+r+n)(j+r+n-1))$. Donc $P(A_3) = j[(j-1)(j-2) + 2(j-1)(r+n) + (r+n)(r+n-1)]/[(j+r+n)(j+r+n-1)(j+r+n-2)]$.
3. Probabilité de n'obtenir aucune boule rouge : $(j+n)(j+n-1)(j+n-2)/((j+r+n)(j+r+n-1)(j+r+n-2))$, donc la probabilité d'obtenir une boule rouge à l'un au moins des trois tirages est $1 - (j+n)(j+n-1)(j+n-2)/[(j+r+n)(j+r+n-1)(j+r+n-2)]$.

Exercice 4

1. Soient E_0 l'événement "pas d'enfant", E_1 "un enfant", E_2 "au moins deux enfants" et A "aller au parc". Alors $P(A) = \sum_i P(A|E_i)P(E_i) = 3/20 \times 3/10 + 2/5 \times 1/5 + 3/5 \times 1/2 = 17/40$, soit 42,5%.
2. $P(E_2|\bar{A}) = P(\bar{A}|E_2)P(E_2)/P(\bar{A}) = (1 - 3/20)3/10/(1 - 17/40) = 51/115$ soit environ 44%.