TD12 – Hiérarchie polynomiale

On rappelle la définition de la hiérarchie polynomiale :

$$\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 = \mathsf{P},$$

et pour $k \geq 1$,

$$\Sigma_k = \mathsf{NP}^{\Sigma_{k-1}}, \Pi_k = \mathsf{coNP}^{\Sigma_{k-1}}, \Delta_k = \mathsf{P}^{\Sigma_{k-1}}.$$

Enfin,

$$\mathsf{PH} = \cup_k \Sigma_k.$$

Exercice 1.

1. Montrer que $\Pi_k = \mathsf{co}\Sigma_k$.

2. Montrer que $A \in \Sigma_k$ si et seulement s'il existe $B \in \mathsf{P}$ et un polynôme $p(n)$ tels que

$$x \in A \iff \exists y_1 \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ \forall y_2 \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ \ldots\ Q\ y_k \in \{0,1\}^{p(|x|)}\ (x, y_1 \ldots y_k) \in B,$$

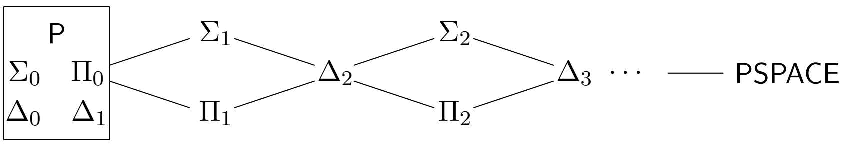
et de même pour Π_k en commençant par $\forall$.

3. Montrer que si $\Sigma_k = \Pi_k$ pour un certain $k \geq 1$, alors $\mathsf{PH} = \Sigma_k$.

Exercice 2.

✎ Montrer que $\mathsf{PH} \subseteq \mathsf{PSPACE}$.

Récapitulons les inclusions connues :



Exercice 3.

1. Donner un problème complet SAT_k pour chaque Σ_k, $k \geq 1$.

2. Montrer que si PH admet un problème complet, alors pour un certain k, $\mathsf{PH} = \Sigma_k$.

3. Montrer que $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{PH}$ implique $\mathsf{PSPACE} = \mathsf{PH} = \Sigma_k$ pour un certain k.

Exercice 4. *Théorème de Karp-Lipton*

On se propose de montrer le résultat suivant (théorème de Karp-Lipton) :

$$\text{si } \mathsf{NP} \subset \mathsf{P/poly} \text{ alors } \Sigma_2 = \Pi_2.$$

1. On dit qu'un circuit C est s-bon si, lorsqu'on lui donne en entrée une formule booléenne $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ de taille s, il décide si φ est satisfaisable.
Montrer que l'ensemble des couples (C, s) où C est s-bon est coNP.

2. En supposant que $\mathsf{NP} \subset \mathsf{P/poly}$, montrer qu'il existe un polynôme p et une famille de circuits (C_s) telle que C_s est s-bon et de taille $\leq p(s)$.

3. Démontrer le théorème de Karp-Lipton.
Indication : montrer que votre problème Π_2-complet favori est dans Σ_2.

4. *Question bonus facile*
Montrer que $\mathsf{NP} \subset \mathsf{P/poly}$ ssi $\mathsf{NP/poly} = \mathsf{P/poly}$.