Numéro d'une machine définie par récurrence

Sylvain Chevillard

9 octobre 2007

Soit α un entier et g une fonction calculable. La fonction f définie par récurrence de la façon suivante est calculable (elle est obtenue par un schéma de récursion primitif) :

$$f : x \mapsto \left| \begin{array}{llll} \text{Si} & x = 0 & \text{alors} & \alpha \\ & & \text{sinon} & g(\langle x,\, f(x-1)\rangle) \end{array} \right.$$

La question qu'on se pose est "peut-on trouver un numéro pour f à partir de α et d'un numéro pour g". La réponse est oui et nous allons montrer comment le calculer.

Considérons la fonction suivante :

$$\psi : \langle n,\, a,\, \omega,\, x\rangle \mapsto \left| \begin{array}{llll} \text{Si} & x = 0 & \text{alors} & a \\ & & \text{sinon} & \varphi_\omega(\langle x,\, \varphi_{s_3^1(\langle n,\, n,\, a,\, \omega\rangle)}(x-1)\rangle) \end{array} \right.$$

Cette fonction est calculable, car elle est obtenu par un test et des simulations de machines calculables. Elle possède donc un numéro que nous noterons r.

En appliquant la fonction s_3^1 :

$$\forall n,\, a,\, \omega,\, x,\ \psi(\langle n,\, a,\, \omega,\, x\rangle) = \varphi_{s_3^1(\langle r,\, n,\, a,\, \omega\rangle)}(x).$$

Dans le cas particulier où on prend $n = r$, on a donc :

$$\forall a,\, \omega,\, x,\ \varphi_{s_3^1(\langle r,\, r,\, a,\, \omega\rangle)}(x) = \psi(\langle r,\, a,\, \omega,\, x\rangle) = \left| \begin{array}{llll} \text{Si} & x = 0 & \text{alors} & a \\ & & \text{sinon} & \varphi_\omega(\langle x,\, \varphi_{s_3^1(\langle r,\, r,\, a,\, \omega\rangle)}(x-1)\rangle) \end{array} \right.$$

En notant $f = \varphi_{s_3^1(\langle r,\, r,\, a,\, \omega\rangle)}$, on a donc par construction que $f(0) = a$ et pour tout $x > 0$, $f(x) = \varphi_\omega(\langle x,\, f(x-1)\rangle)$.

Ceci achève donc notre démonstration : si ω est un numéro de la fonction g, un numéro pour la fonction f est donc $s_3^1(\langle r,\, r,\, \alpha,\, \omega\rangle)$.

Remarque : ce que nous avons montré, c'est qu'on peut déterminer un numéro pour f en fonction de α et d'un numéro pour g. À cette fin, nous utilisons un numéro r pour une certaine machine. On peut se sentir insatisfait de ne pas avoir calculé explicitement r.

Il n'y a rien de difficile à exprimer r de façon plus détaillée. Comme il faut bien partir de quelque chose tout de même, notons φ_{test} la fonction $\langle a,\, b,\, x\rangle \mapsto$ Si $x = 0$ alors a sinon b.

Alors, on a

$$\psi(\langle n,\, a,\, \omega,\, x\rangle) = \varphi_{\text{test}}(\langle a,\, \varphi_\omega(\langle x,\, \varphi_{s_3^1(\langle n,\, n,\, a,\, \omega\rangle)}(x-1)\rangle),\, x\rangle).$$

On peut donc exprimer explicitement r en utilisant la fonction c vue en TD ainsi que les numéros pour les projections et les fonctions de codage et le numéro "test".

Application à la fonction R vue en TD : dans le TD, nous avions la fonction R définie par récurrence par $R(0) = p$ et $R(n+1) = c(\langle q,\ R(n)\rangle)$.

Donc si on a un numéro γ pour la fonction c, on peut exprimer complètement un numéro pour R en fonction d'un petit nombre de numéros qu'on peut considérer comme des données de base :

- les numéros des fonctions de codage et de projection ;
- γ ;
- test ;
- le numéro u d'une machine universelle.