TD03 - Super titre à trouver

Exercice 1. *Divide and Conquer*

Soit L un langage rationnel infini.

✎. Montrer qu'il existe une famille infinie $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de langages rationnels infinis deux à deux disjoints telle que

$$L = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i.$$

Exercice 2. *Un truc de résiduels*

✎. Existe-t-il un langage L (sur un alphabet fini quelconque) ayant un nombre infini de résiduels distincts et tel que tous ses résiduels soient rationnels ?

Exercice 3. *C'est le BORD(L)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Les langages suivants sont-ils nécessairement rationnels ?

1. CYCLE(L) = $\{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
2. MAX(L) = $\{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. MIN(L) = $\{x \in L \mid$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4. INIT(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*,\ xy \in L\}$
5. $\overline{L} = \{x \mid \overline{x} \in L\}$
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7. LOG(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = 2^{|x|}\}$
8. SQRT(L) = $\{x \in \Sigma^* \mid \exists\, y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|^2\}$

. BORD(L) = $\{w \in \Sigma^* \mid \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$

Exercice 4. *L'abominable Lex L. (contre Superman)*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ quelconque. On munit Σ d'un ordre total et l'on considère l'ordre lexicographique $\leq_{\text{lex}}$ sur Σ^*. On définit le langage

$$L_{\text{lex}} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{\text{lex}} x\},$$

c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.

✎. Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 5. *Des SOUS !*

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage quelconque.

. Le langage $\text{SOUS}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L, u \preccurlyeq v\}$ est-il nécessairement rationnel ? (où $u \preccurlyeq v$ ssi u est un sous mot de v)