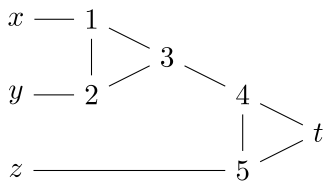
# Complexité algorithmique : correction de l'exercice 5

M1 informatique

Le 19 décembre 2014

**Exercice 5**

1. On note $a$, $b$ et $c$ les trois couleurs. On numérote comme suit les sommets du gadget de clause :




— Si $x$, $y$ et $z$ sont coloriés de la même couleur, disons $a$, alors les sommets 1 et 2 doivent être coloriés par $b$ et $c$, ce qui implique que 3 est colorié par $a$. Le même raisonnement montre que 4 et 5 doivent être coloriés par $b$ et $c$, ce qui implique que $t$ est colorié par $a$.

— Si $x$, $y$ et $z$ ne sont pas coloriés de la même couleur, il y a deux cas :

 — si $x$ et $y$ sont coloriés de même couleur $a$, et $z$ est colorié en $b$, alors comme précédemment, 3 doit être $a$. On peut alors colorier 4 et 5 en $b$ et $a$ pour obtenir $c$ pour $t$, ou encore en $c$ et $a$ pour obtenir $b$ pour $t$, ou enfin en $b$ et $c$ pour obtenir $a$ pour $t$. Ainsi, $t$ peut être colorié de toutes les manières possibles ;

 — si $x$ et $y$ sont coloriés $a$ et $b$, alors 3 peut prendre une couleur quelconque (même raisonnement que précédemment sur $t$), en particulier une couleur différente de $z$, donc par le même raisonnement, on peut colorier $t$ de toutes les manières possibles.

2. Cf. figure ci-dessous.

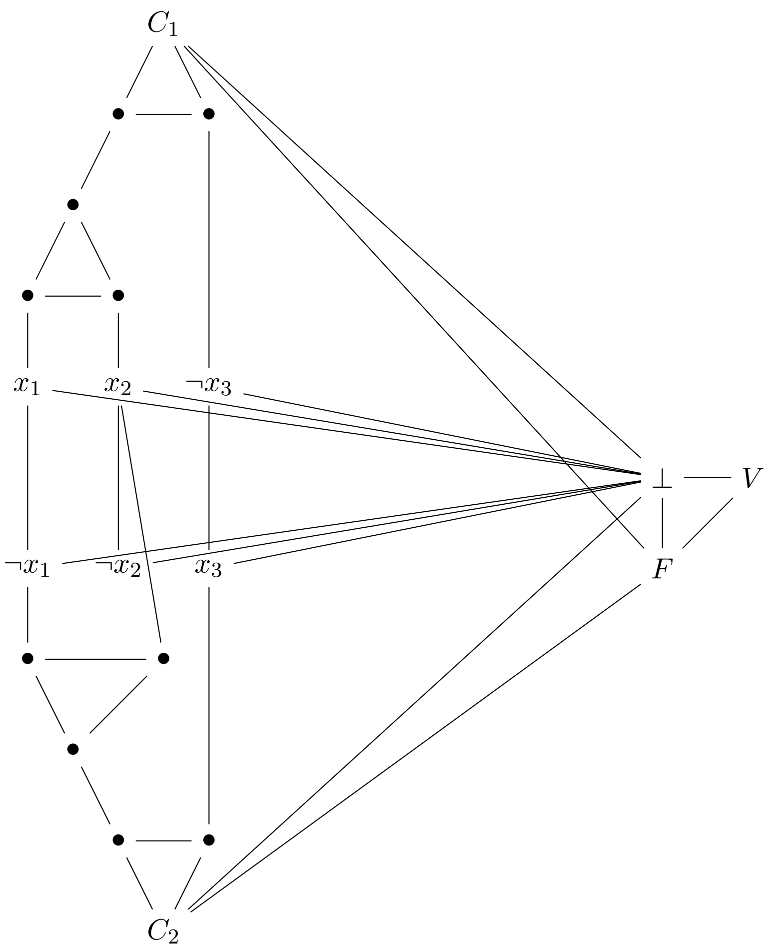
3. On nomme les trois couleurs $v$ (pour « vrai »), $f$ (pour « faux ») et $b$. On colorie les sommets $V$, $F$ et $\perp$ respectivement en $v$, $f$ et $b$. Dans l'affectation satisfaisant $\phi$, si $x_i$ vaut 1 alors on colorie le sommet $x_i$ en $v$ et $\neg x_i$ en $f$, et inversement si $x_i$ vaut 0. Pour l'instant, par construction du graphe, toutes les couleurs donnent bien un coloriage valide. Il reste à colorier les clauses et leur gadget.

   Puisque chaque clause $C_j$ contient un littéral vrai, dans chaque gadget de clause l'un au moins des sommets $x$, $y$ et $z$ est colorié $v$ : par la propriété du gadget, on peut le colorier de sorte que $C_j$ soit colorié $v$, ce qui est compatible puisque $C_j$ est relié à $F$ et $\perp$.

   On obtient donc un coloriage valide avec 3 couleurs.

4. Réciproquement, supposons que $G_\phi$ soit colorié en trois couleurs $v$, $f$ et $b$. Quitte à renommer les couleurs, on peut supposer que le sommet $V$ est colorié en $v$, $F$ en $f$ et $\perp$ en $b$.

   On remarque que les sommets correspondant à des littéraux sont coloriés $v$ ou $f$ puisqu'ils sont reliés à $\perp$.




De plus, les sommets $C_j$, reliés à $F$ et $\perp$, doivent être coloriés en $v$, ce qui impose (par les propriétés du gadget de clause) que dans chaque clause, un littéral au moins soit colorié $v$ aussi.

En affectant à une variable $x_i$ la valeur 1 si le sommet correspondant est colorié $v$, et 0 sinon, on obtient donc une affectation qui satisfait $\phi$ (chaque clause contient un littéral vrai).

5. L'algorithme non déterministe suivant décide le langage 3COL :
   — pour chaque sommet de $G$, deviner une couleur parmi $\{a, b, c\}$ ;
   — pour tout sommet $s$ de $G$ faire
      — pour tout voisin $t$ de $s$ faire
         — si $s$ et $t$ sont de même couleur, rejeter
   — accepter.

   Si $n$ est le nombre de sommets, la première ligne prend un temps $O(n)$. On exécute $n$ fois la boucle extérieure, et pour chaque exécution, il faut parcourir tout le codage du graphe pour connaître les voisins et leur couleur. Or le codage du graphe est de taille $O(n^2)$, donc au total le nombre d'étapes est $O(n^3)$, ce qui est polynomial par rapport à la taille de l'entrée. Donc 3COL $\in \mathsf{NP}$.

   De plus, on a montré dans les premières questions une réduction de 3SAT à 3COL : la fonction $\phi \mapsto G_\phi$ vérifie $\phi \in$ 3SAT ssi $G_\phi \in$ 3COL. Or 3SAT est $\mathsf{NP}$-complet, donc 3COL est $\mathsf{NP}$-difficile.

   Au final, 3COL est donc $\mathsf{NP}$-complet.