Partiel de calculabilité et complexité

M1 informatique – 2h

Le 9 novembre 2010

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 – Vrai ou faux ? *(5 points)*

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Ne justifiez pas vos réponses. On comptera +0,5 point par bonne réponse, −0,5 point par mauvaise réponse, et 0 pour une absence de réponse. Si la note totale est négative, on donnera 0 à l'exercice.

1. Il existe un langage décidable A et un langage indécidable B tel que A se réduit à B.
2. Il existe deux langages indécidables A et B tels que A se réduit à B.
3. Si A est récursivement énumérable et B est décidable, alors $A \cap B$ est décidable.
4. Si A est récursivement énumérable et $B \subseteq A$, alors B est récursivement énumérable.
5. Il existe deux langages A et B distincts tels que $A \leq_m B$ et $B \leq_m A$.
6. Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non calculable, le langage $\{n \in \mathbb{N} \ : \ f(n) = 0\}$ est indécidable.
7. Le langage $\{\langle M, x, k\rangle \ : \ M(x)$ s'arrête en $\leq k$ étapes$\}$ est indécidable.
8. S'il existe une machine reconnaissant $\{x \ : \ |x| \geq 2010 \wedge x \in A\}$ pour un certain langage A, alors A est décidable.
9. Si des langages $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont tous décidables, alors $\cup_{i=0}^{+\infty} A_i$ est décidable.
10. Il existe un langage A auquel tout autre langage B se réduit.

Exercice 2 *(4 points)*

Montrer qu'un langage est récursivement énumérable si et seulement s'il se réduit au problème de l'arrêt $H = \{\langle M, x\rangle \ : \ M(x) \text{ s'arrête}\}$.

Exercice 3 *(4 points)*

Montrer que si A et B sont deux langages récursivement énumérables tels que leur union et leur intersection sont décidables, alors A et B sont décidables.

Exercice 4 *(3 points)*

Expliquer en détail (mais sans donner explicitement les transitions) le fonctionnement d'une machine de Turing à deux rubans qui décide le langage $\{a^{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Indication : afin d'éviter d'effectuer des multiplications, on pourra utiliser le fait que $n^2 = \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)$.

Exercice 5 *(4 points)*

Soit A le problème suivant :

Entrée – le code d'une machine de Turing M à un ruban fonctionnant sur l'alphabet $\{0,1\}$.

Problème – au cours du calcul $M(\epsilon)$, 3 zéros consécutifs apparaissent-ils sur le ruban ?

1. Justifier que le théorème de Rice ne permet pas de conclure quant à l'indécidabilité de A.
2. Montrer que A est indécidable (on pourra donner une réduction du problème $H' = \{\langle M\rangle \ : \ M(\epsilon) \text{ s'arrête}\}$).