
TD2

Exercice 1.*Automates déterministes ou non*


1. Donner un automate fini non-déterministe qui reconnaisse l'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ dont la i -ème lettre en partant de la fin est un a .
2. Même question avec un automate déterministe.

Exercice 2.*Longueur et périodicité*

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires.

1. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.
2. En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 3.*Rationnel ?*

 Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :


1. $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$.
2. $\{a^m b^n, n \geq 0\}$.
3. $\{a^m b^n a^{m+n}, m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$.
4. $\{a^p, p \text{ premier}\}$.
5. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
6. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b .
7. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
8. $\{a^i b^j, i \geq j\}$.

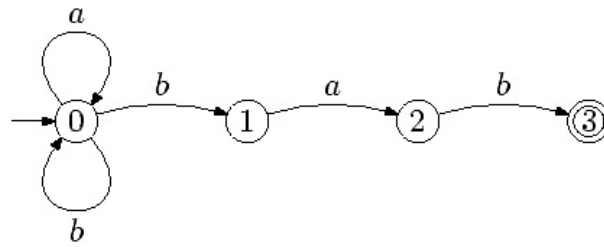
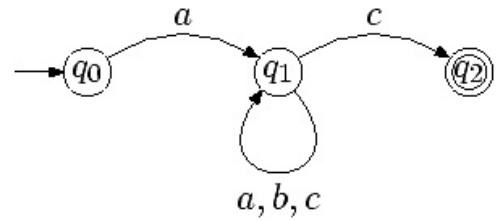
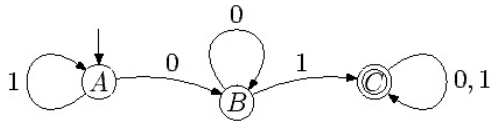
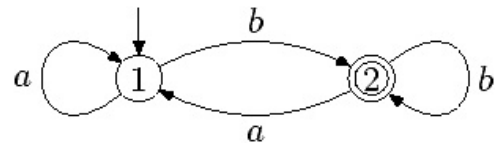
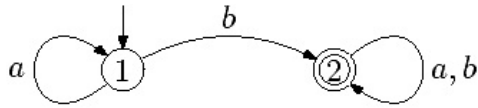
Exercice 4.*Expression rationnelle vers automate*

 Donner des automates finis reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes (on pourra penser aux automates normalisés vus en cours).

- $a^* b^*$
- $(a \cup b) a a b (a \cup b)^*$
- $b((a a b \cup b)^* a (a a)^*)^* b^*$
- $((a^* b \cup b^* a)^* \cup (a^* b^* a \cup a a^* b)^*)^*$

Exercice 5.*Automate vers expression rationnelle*

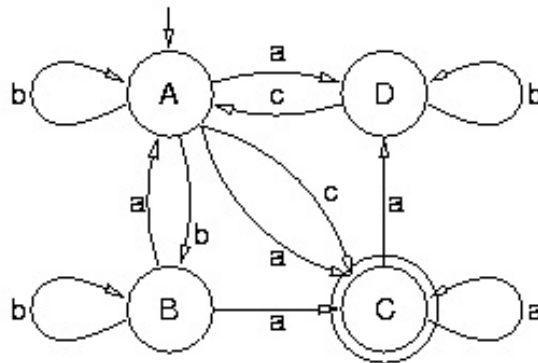
 Donner des expressions rationnelles pour les langages reconnus par les cinq automates suivants. Si l'automate est non-déterministe, donner un automate déterministe équivalent.



Exercice 6.

Déterminisation

Déterminiser l'automate suivant.



Exercice 7.

Rationnel ?

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ .

Les langages suivants sont-ils nécessairement rationnels ?

1. $\text{MIN}(L) = \{x \in L \mid \text{aucun préfixe propre de } x \text{ n'est dans } L\}$
2. $\text{MAX}(L) = \{x \in L \mid \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3. $\text{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
4. $\text{CYCLE}(L) = \{x_1x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \text{ et } x_2x_1 \in L\}$
5. $\bar{L} = \{x \mid \bar{x} \in L\}$ (l'ensemble des mots miroirs)
6. $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \text{ avec } xy \in L \text{ et } |y| = |x|\}$
7. $\text{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz \text{ et } xyz \in L\}$