TD1

Exercice 1. *Pseudo-code*

Pour les questions qui suivent, on cherche à écrire un algorithme en pseudo-code qui n'utilise qu'une mémoire finie, à l'aide d'une instruction équivalente au `switch...case` du C.

1. Déterminer si le nombre de lettres a dans la chaîne S est pair.

2. Déterminer si la chaîne S ne contient pas trois a consécutifs.

3. Déterminer si la chaîne S est composée d'abord d'une série de a puis d'une série de b.

4. Transformer une suite de nucléotides (A, C, U ou G) en une suite d'acides aminés selon le processus de traduction. On se limitera au petit nombre de correspondances suivantes :

$AUG \to$ start	$UAG, UGA, UAA \to$ stop	$AAU, AAC \to N$	$CAA, CAG \to Q$
$UGG \to W$	$AUU, AUC, AUA \to I$	$UUU, UUC \to F$	$AAA, AAG \to K$

5. Déterminer si la chaîne S contient le même nombre de a et de b modulo 3.

6. Parvenez-vous à utiliser seulement une mémoire finie pour déterminer si la chaîne S contient le même nombre de a que de b ?

Exercice 2. *Langages*

1. Que vaut la concaténation des mots a^i et a^j ?

2. Soient $A = \{a^{2i} : i \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{\epsilon, a\}$ sur l'alphabet $\{a\}$. À quoi sont égaux $A \cup B$, $A \cap B$, ${}^cB$, ${}^cA$, B^2, A^2, $A.B$?

3. Même question avec $A = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{b^n : n \in \mathbb{N}\}$ sur l'alphabet $\{a, b\}$.

4. Que valent $\{a^{3n+2} : n \in \mathbb{N}\}.a$ et $\{a^{3n+2} : n \in \mathbb{N}\}.\{a^{3n+1} : n \in \mathbb{N}\}$?

5. Soient $A = \{a^{3i} : i \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{a^{4i} : i \in \mathbb{N}\}$. Que vaut $A.B$?

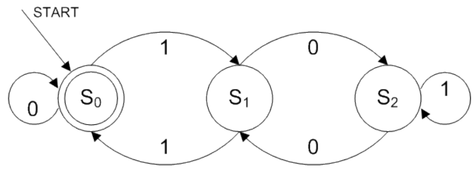
6. Que valent $\{a\}^*$, $\{ab\}^*$, $\{aa, b\}^*$, $\{a^{2^i} : i \in \mathbb{N}\}^*$?

Exercice 3. *Automates finis*

1. Pour toutes les questions de l'exercice 1 (la question 4 est particulière et on parlera de *transducteur*), donner le langage correspondant en précisant l'alphabet, ainsi qu'un automate fini pour le reconnaître (sauf pour la question 6).

2. Donner des automates finis pour reconnaître les langages suivants.
- $\{a^{5n+2} : n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{(ab)^n : n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{b^2a^n : n \in \mathbb{N}\}$;
- $\{a^nba^mb^k : n, m, k \in \mathbb{N}\}$.

3. Quel langage reconnaît l'automate suivant ?



Exercice 4. *Intersection*

1. Soient $A = \{0^n 1^m 0^k : n, m, k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{0^n 1 0^k 1^m : n, k, m \in \mathbb{N}\}$. Donner des automates pour A et B, puis pour $A \cap B$.

2. Soient A et B deux langages rationnels. Proposer une méthode générale pour construire un automate reconnaissant $A \cap B$ à partir des automates pour A et B. En déduire que $A \cap B$ est aussi rationnel.

Exercice 5. *Complémentaire*

1. Soit $\mathcal{A}$ un automate reconnaissant un langage A. Comment transformer $\mathcal{A}$ en un automate équivalent tel que toutes les transitions sont possibles à partir de chaque état (on parle d'automate *complet*) ?

2. À partir d'un automate complet $\mathcal{A}$ reconnaissant un langage A, construire un nouvel automate reconnaissant le complémentaire de A.

3. En déduire que si A est un langage rationnel, alors ${}^cA$ l'est aussi.

Exercice 6. *Union*

✎ Reprendre l'exercice 4 avec $A \cup B$ plutôt que $A \cap B$ (attention aux automates non complets).