Université Paris Diderot – Paris 7 | Algorithmique
L3 Informatique | Année 2008-2009, 1^{er} semestre

TD n°6

Graphes non-orientés

Préambule : dans l'ensemble de ce TD les graphes considérés sont finis, non-orientés, simples (pas d'arête multiple entre deux sommets) et sans boucle (une arête reliant un sommet à lui-même). Soit $G = (V, E)$, où V représente l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes, avec $E \subseteq V^2$.

Exercice 1 [Connexité]

*Rappel de cours : soit $G = (V, E)$ un graphe. Un **chemin** P reliant un sommet x à un sommet y dans G est une suite de sommets $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ tel que $v_0 = x$, $v_k = y$ et pour tout i de 0 à $k-1$, (v_i, v_{i+1}) est une arête, c'est-à-dire $(v_i, v_{i+1}) \in E$. Le graphe G est dit **connexe** si pour tous les couples de sommets (x, y) de V, il existe au moins un chemin dans G reliant x à y.*

1. Montrez que tout graphe connexe à n sommets a au moins $n-1$ arêtes.
2. Donnez un algorithme pour tester la connexité d'un graphe G. Quelle est sa complexité ?

Exercice 2 [Graphes eulériens]

Au 18ème siècle une question animait les dîners des notables de la petite ville de Königsberg en Prusse orientale (aujourd'hui Kaliningrad). À l'époque la ville comptait sept ponts qui franchissait la rivière Pregolya. Ces ponts reliaient les deux îles et les rives de Königsberg. La question qui faisait débat était de savoir si lors de la promenade dominicale il était possible de passer une fois et une seule par chaque pont de la ville et revenir à son point de départ. En 1736, Leonhard Euler apporta la réponse à ce problème. Saurez-vous en faire autant ?

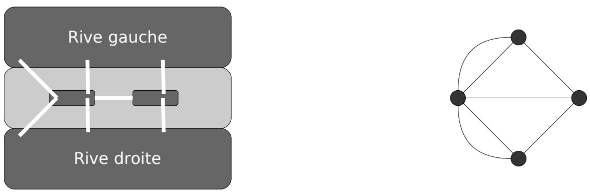
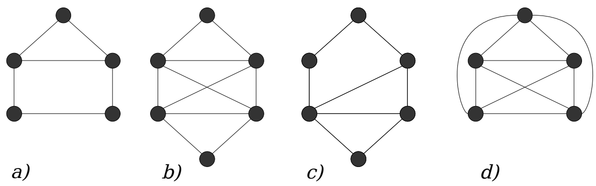


FIGURE 1 – Schéma des ponts de Königsberg et le multi-graphe associé.

*Rappel de cours : un **cycle** dans un graphe est un chemin de ce graphe reliant un sommet à lui-même.*

Un cycle C est dit eulérien si C passe une fois et une seule par chaque arête du graphe. Un graphe G est eulérien s'il admet au moins un cycle eulérien.

1. Les graphes ci-dessous sont-ils eulériens ? Si oui, exhiber un cycle eulérien ; sinon, comment se convaincre qu'ils ne sont pas eulériens ?



2. Montrez que si G est eulérien alors tous les sommets sont de degré pair.
3. Si G admet un cycle eulérien, quelle est la taille de ce cycle ?

Exercice 3 [Graphes hamiltoniens]

Un cycle C est dit hamiltonien si C passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe. Un graphe est dit hamiltonien s'il admet un cycle hamiltonien.

1. Indiquez si les graphes ci-dessous sont hamiltoniens. Si oui montrer le cycle hamiltonien, sinon dites pourquoi.

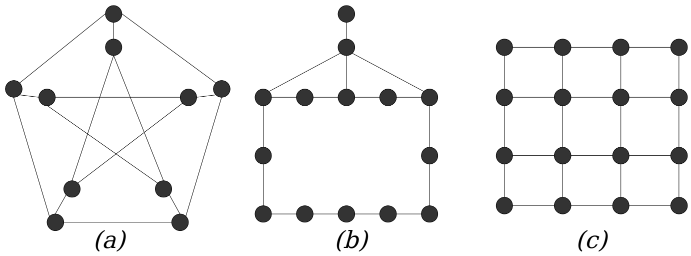


FIGURE 2 – (a) Graphe de Petersen 3-régulier, (b) Maison agrandie, (c) Grille

2. Proposez un algorithme simple pour trouver si un tel cycle existe. Quelle est sa complexité ?
3. Si un tel cycle existe, quelle est sa taille ?

Exercice 4 [Degré]

Le degré d'un sommet v d'un graphe G est le nombre de sommets du graphe auxquels il est connecté. On le notera $d_G(v)$. Plus formellement :

$$d_G(x) = |\{y \mid y \in V(G) \text{ et } (x, y) \in E(G)\}|$$

1. Si m est le nombre d'arêtes d'un graphe G, montrez que :

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m$$

2. Montrez que dans un graphe il y a un nombre pair de sommets ayant un degré impair.

Exercice 5 [Graphes bipartis]

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles $\{V_1, V_2\}$ de V (i.e. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 = V$), tel que toutes les arêtes de E ont exactement une extrémité dans V_1 et une extrémité dans V_2.

1. Indiquez si la maison (ci-dessous) est un graphe biparti. De même pour la grille $G_{4,4}$.
2. Montrez qu'un graphe est biparti ssi il n'a pas de cycle de longueur impaire. La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qui le composent. (Astuce : on peut se servir d'une 2-coloration)

   Remarque : colorier un graphe revient à mettre des couleurs sur chaque sommet du graphe. La seule contrainte imposée est que deux sommets adjacents ne doivent pas être de la même couleur. Trouver une coloration est facile, il suffit de mettre une couleur différente sur chaque sommet ; mais cela ne se révèle d'aucune utilité puisque l'intérêt de la coloration est de trouver un nombre de couleurs minimum pour colorier le graphe (cf exercice 6).
3. Proposez un algorithme qui prend en entrée un graphe, teste s'il est biparti et renvoie un cycle impair sinon. On pourra se servir du parcours en largeur (BFS) vu en cours.

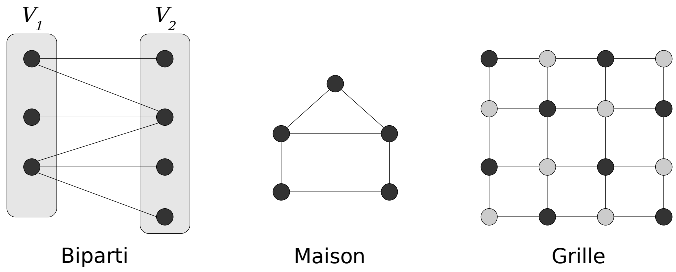


FIGURE 3 – Schéma général d'un graphe biparti – La maison – La grille $G_{4,4}$

4. Évaluez la complexité de votre algorithme.

Exercice 6 [**4 Couleurs*****]

Montrez que tout graphe planaire peut être colorié avec au plus 4 couleurs (la coloration est définie à l'exercice 5). Un graphe est planaire s'il admet un plongement dans le plan qui ne produit pas de croisement. Autrement dit un positionnement des sommets de manière à ce que les arêtes ne se croisent pas. Les graphes planaires sont les graphes qui ne contiennent pas K_5 et $K_{3,3}$ comme mineur (figure 6). Un graphe H est un mineur de G si on peut obtenir H à partir de G, en contractant des arêtes de G, en supprimant des arêtes ou encore, en supprimant des sommets isolés.

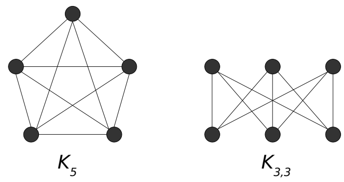


FIGURE 4 – Mineurs exclus pour la planarité.

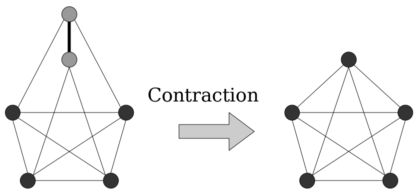


FIGURE 5 – Contraction de l'arête "grisée" en un seul sommet.