INF554: Utilisation de l'aléatoire en algorithmique	**Automne 2014**

Cours 5 — 13 octobre

Enseignant : Frédéric Magniez — *Rédacteur : Emmanuel Orsini*

5.1 Calcul de $F_2 = \sum_{i=1}^{m} f_i^2$

Lemme 5.1. *Pour m requêtes distictes :*
$F_2 = m$

Lemme 5.2. *Pour m - 1 requêtes distictes et une requête de multiplicité 0.1m :*
$F_2 = \frac{m^2}{100} + m - 1$

Algorithm 1 Supposons donnée $h : [m] \to \{-1, 1\}$ complètement aléatoire

$X \leftarrow 1$
while $(stream \neq \emptyset)$ **do**
  $a \leftarrow next$
  $X \leftarrow X + h(a)$
end while
return $V = X^2$

Théorème 5.3. $\mathbb{E}(V) = F_2$

Preuve: En développant X^2, par linéarité de l'espérance et indépendance des h(i) □

L'algorithme prend ln(n) bits mais h prends m bits de stockage, on veut progresser.

Théorème 5.4. *Soit $u \in \{0,1\}^{\lceil \ln(m) \rceil}$ aléatoire. On définit :* $\begin{array}{cccc} h & : & [m] & \to & \{-1,1\} \\ & & x & \mapsto & (-1)^{u \cdot x} \end{array}$
La fonction h ainsi construite suffit pour avoir $\mathbb{E}(V) = F_2$

Preuve: Il suffit de prouver que pour $x \neq x'$ et (s, s') donnés :
$\mathbb{P}[h(x) = s \text{ et } h(x') = s'] = \frac{1}{4}$
Pour cela on pose $S_{tt'} = \left\{ u \in \{0,1\}^{\lceil \ln(m) \rceil} | u \cdot x = s \text{ et } u \cdot x' = s' \, [modulo\ 2] \right\}$
On montre ensuite que les 4 $S_{tt'}$ sont en translations les uns par rapport aux autres, et donc en bijection. □

Algorithm 2 Mémoire ln(n), déterministe

$v \leftarrow 0,\ c \leftarrow 0$
while ($stream \neq \emptyset$) **do**
  $a \leftarrow next$
  if $a == v$ **then**
    $c \leftarrow c + 1$
  else
    if $c == 0$ **then**
      $v \leftarrow a$
      $c \leftarrow 1$
    else
      $c \leftarrow c - 1$
    end if
  end if
end while
return v

5.2 Trouver les éléments fréquents

Théorème 5.5. *Si un élément j a une fréquence $f_j > \frac{n}{2}$ l'algorithme 2 le renvoit de manière déterministe.*

Preuve: Notons j l'élément dominant, m_d le nombre de fois que l'on l'a vu après d tours de boucles, et

$$c' = \begin{cases} c & \text{si } v == j \\ -c & \text{si } v \neq j \end{cases}$$

Il suffit de vérifier $c' \geq m_d$ à chaque instant pour prouver que $c' > 0$ à la fin de l'algorithme, et donc j est renvoyé. □

Corollaire 5.6. *En deux passes on peut décider s'il y a un dominant.*

Preuve: On applique l'algorithme 2 pendant la première passe, il nous donne le seul candidat possible. La seconde passe calcule la fréquence de ce candidat. □

Corollaire 5.7. *On peut renvoyer k éléments distincts tels que $f_j > \frac{n}{k+1}$.*

Preuve: On applique l'algorithme 2 avec k valeurs et k compteurs. □