

Devoir 1:  
à rendre pour le 17/2/2014  
Chaque devoir peut avoir jusqu'à 3 auteurs

Il s'agit d'étudier un algorithme de vague: *l'algorithme de phases*.

**Hypothèses** Le réseau est représenté par un graphe orienté  $G = \langle \Pi, V \rangle$  fortement connexe. On notera  $d(p, q)$  la longueur du plus court chemin de  $p$  à  $q$  (attention, en général  $d(p, q) \neq d(q, p)$ !).  $D$  le *diamètre* est défini par  $D = \max\{d(p, q) \mid p, q \in \Pi\}$ . Pour cet algorithme on suppose que  $D$  est connu des processus. Pour chaque processus  $p$ ,  $In_p = \{q \in \Pi \mid (q, p) \in V\}$  est l'ensemble des processus qui peuvent envoyer directement à  $p$  un message.  $\preceq$  est la relation de causalité entre événements. Pour simplifier on supposera que la communication est FIFO (les messages entre deux noeuds sont reçus suivant leur ordre d'émission).

---

Initialisations:

- 1  $\forall q \in In_p : Rec_p[q] := 0$
- 2  $Phase_p := 0$

CODE POUR LE PROCESSUS  $p$ :

- 3  $\{ \langle \rangle \text{ de } q \} \longrightarrow \text{recevoir } \langle \rangle ;$
  - 4  $Rec_p[q] := Rec_p[q] + 1$
  - 5  $\{ \forall q \in In_p : Rec_p[q] \geq Phase_p \wedge Phase_p < D \} \longrightarrow \text{send } \langle \rangle \text{ à tous les } q \in Out_p$
  - 6  $Phase_p := Phase_p + 1$
  - 7  $\{ \forall q \in In_p : Rec_p[q] \geq D \wedge Phase_p \geq D \} \longrightarrow \text{decider}$
- 

Figure 1: Algorithme de phases

### Questions

1. On considère le graphe  $\Pi = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $V = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)\}$ . Ici le diamètre du graphe est 4.  
Donner un exemple d'exécution de l'algorithme de phase (Figure 1). Sur cet exemple indiquer les événements suivants: l'émission du premier message envoyé par le processus 1 au processus 2, l'émission du 2ème message envoyé par le processus 2 au processus 3, l'émission du 3ème message envoyé par le processus 3 au processus 4, l'émission du 4ème message envoyé par le processus 4 au processus 5. Dans votre exemple d'exécution quel est l'ordre de ces événements?  
Pouvez vous trouver un exemple d'exécution où ces événements apparaîtraient dans un ordre différent?
2. On veut maintenant montrer que l'algorithme de phases termine et décide. Pour cela, on considère une exécution  $\gamma$  de cet algorithme.
  - (a) Combien de messages peuvent être envoyés sur chaque lien de communication? Quel est le nombre maximal de messages qui peuvent circuler?

- (b) Soit l'instant  $t_0$  à partir duquel dans  $\gamma$  tous les messages ont été reçus et plus aucun message ne sera envoyé.
- i. Vérifier que dans  $\gamma$  à partir de l'instant  $t_0$ , on a:
    - $Phase_p > 0$  pour tout processus  $p$ ,
    - $Rec_p[q] = Phase_q$  pour tout processus  $p, q$  tel que  $q \in In_p$ ,
    - $Phase_p = D$  ou  $\exists q \in In_p : Rec_p[q] < Phase_p$ .
  - ii. En déduire que tous les processus décident. Pour cela on pourra considérer la valeur minimale des  $Phase_p$  après  $t_0$ , et montrer en utilisant les propriétés précédentes que cette valeur est au moins égale à  $D$ .
3. On va montrer maintenant que l'algorithme de phases est un algorithme de vague.  $E_p$  est l'ensemble des événements du processus  $p$ .
- Soit  $f_{pq}^i$  l'évènement (s'il existe) de  $\gamma$  correspondant à la  $i$ -ème émission d'un message par  $p$  vers  $q$  et soit  $g_{pq}^i$  l'évènement de  $\gamma$  correspondant à la  $i$ -ème réception (si elle existe) par  $q$  d'un message en provenance de  $p$ . On note  $e_p$  l'évènement correspondant au démarrage de l'algorithme en  $p$  et  $d_q$  la décision sur  $q$ .
- On suppose que la communication est "FIFO" (les messages de canal  $pq$  sont reçus suivant leur ordre d'émission), dans ce cas on a en particulier  $f_{pq}^i \preceq g_{pq}^i$
- Montrer que:
- (a) Pour tout processus  $p \in \Pi$ , alors pour tout  $s \in \Pi$ ,  $e_s \preceq d_p$ .  
Pour cela on pourra montrer par induction sur la longueur des chemins que si  $p_0, p_1, \dots, p_l$  avec  $l < D$  est un chemin de  $p_0$  à  $p_l$  alors,  $e_{p_0} \preceq g_{p_{l-1}p_l}^l$ .
  - (b) En déduire que l'on a bien un algorithme de vagues. Combien de processus décident? Quels sont les initiateurs? Combien de messages sont échangés?
  - (c) Même si la communication n'est pas FIFO, montrer que  $f_{pq}^i \preceq g_{pq}^i$ . En déduire que l'on a encore un algorithme de vague si la communication n'est pas FIFO.
4. On suppose que chaque processus  $p$  a une variable initiale  $v_p$ . Ecrire un algorithme qui calcule  $\min\{v_p | p \in \Pi\}$  (on veut que chaque processus connaisse cette valeur à la fin de l'algorithme).
5. On suppose que chaque procesus a une identité  $id_p$ . Ecrire un algorithme basé sur l'algorithme de phases de qui calcule pour chaque processus l'ensemble de toutes les identités présentes ( $\{id_p | p \in \Pi\}$ ).