

La résolution pour le calcul des prédicats

Méthode par réfutation :

A est **valide** ssi $\neg A$ est **insatisfaisable** (n'a pas de modèle) ssi en appliquant la méthode de résolution à $\neg A$ on obtient une contradiction (**réfutation**).

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

| | | |
|--------------------------------|----------|---|
| $\forall x. A$ | \equiv | $\neg \exists x. \neg A$ |
| $\neg \forall x. A$ | \equiv | $\exists x. \neg A$ |
| $\exists x. A$ | \equiv | $\neg \forall x. \neg A$ |
| $\neg \exists x. A$ | \equiv | $\forall x. \neg A$ |
| $\forall x. (A \wedge B)$ | \equiv | $\forall x. A \wedge \forall x. B$ |
| $\exists x. (A \vee B)$ | \equiv | $\exists x. A \vee \exists x. B$ |
| $\exists x. (A \rightarrow B)$ | \equiv | $\forall x. A \rightarrow \exists x. B$ |
| $\forall x. \forall y. A$ | \equiv | $\forall y. \forall x. A$ |
| $\exists x. \exists y. A$ | \equiv | $\exists y. \exists x. A$ |

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

| | | | | |
|--------------------------------|----------|------------------------------|----------|-----|
| $\forall x. A$ | \equiv | $\exists x. A$ | \equiv | A |
| $\forall x. (A \wedge B)$ | \equiv | $A \wedge \forall x. B$ | | |
| $\exists x. (A \wedge B)$ | \equiv | $A \wedge \exists x. B$ | | |
| $\forall x. (A \vee B)$ | \equiv | $A \vee \forall x. B$ | | |
| $\exists x. (A \vee B)$ | \equiv | $A \vee \exists x. B$ | | |
| $\exists x. (A \rightarrow B)$ | \equiv | $A \rightarrow \exists x. B$ | | |
| $\forall x. (A \rightarrow B)$ | \equiv | $A \rightarrow \forall x. B$ | | |
| $\exists x. (B \rightarrow A)$ | \equiv | $\forall x. B \rightarrow A$ | | |
| $\forall x. (B \rightarrow A)$ | \equiv | $\exists x. B \rightarrow A$ | | |

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en **forme prénexe** ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n A$, où chaque Q_i est un quantificateur \forall ou \exists et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Exemples

$$\begin{aligned}
 (\forall x p(x)) \wedge r(x) &\equiv \forall y (p(y) \wedge r(x)) \\
 (\forall x p(x)) \wedge (\forall x r(x)) &\equiv \forall x (p(x) \wedge r(x)) \\
 (\forall x p(x)) \wedge (\forall x r(x)) &\equiv \forall x \forall y (p(x) \wedge r(y)) \\
 (\forall x p(x)) \vee (\forall x r(x)) &\equiv \forall x \forall y (p(x) \vee r(y)) \\
 (\forall x p(x)) \rightarrow (\exists y r(y)) &\equiv \exists x \exists y (p(x) \rightarrow r(y)) \\
 \neg[(\forall x p(x)) \rightarrow (\exists y r(y))] &\equiv \forall x \forall y \neg(p(x) \rightarrow r(y))
 \end{aligned}$$

Exemples

G' est la skolemisation partielle de G .

$$\begin{array}{ccc}
 G & & G' \\
 \forall x \forall y \exists z r(x, z) & & \forall x \forall y r(x, f(x, y)) \\
 \forall x \exists z \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(z)) & & \forall x \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(g(x))) \\
 \exists x \exists z \forall y s(x, x, z) & & \exists z \forall y s(a, a, z)
 \end{array}$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénex de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} \dots Q_{n+i} x_{n+i} A$. Soit f un **nouveau** symbole de fonction n -aire. La formule $\forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} \dots Q_{n+i} x_{n+i} \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}(A)$ est la **skolemisation partielle** de G .

Lemme : Soit G une formule prénex et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G a un modèle ssi G' a un modèle.

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénex ayant n quantificateurs \exists . La **Skolemisation** de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la Skolemisation de la formule G . Alors

- Si G contient n quantificateurs \exists , G' contient **au plus** n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs \exists .
- G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la Skolemisation de G .

$$\begin{array}{l} G \\ \forall x \forall y \exists z r(x, z) \\ \forall x \exists z \forall y \exists w \exists w' s(w', x, h(z)) \\ \exists x \exists z \forall y s(x, x, z) \end{array} \qquad \begin{array}{l} G' \\ \forall x \forall y r(x, f(x, y)) \\ \forall x \forall y s(i(x, y), x, h(g(x))) \\ \forall y s(a, a, b) \end{array}$$

Forme normale conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme $r(t_1, \dots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \dots, t_n)$.
- Une **clause** est une formule de la forme $L_1 \vee \dots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La **clause vide** s'écrit \perp .
- Une formule est en **forme normal conjonctive (FNC)** ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \dots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La **FNC vide** s'écrit \top .

Exemples

\top est une FNC. \perp est une FNC.

$\neg p(h(x))$ est une FNC.

$\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.

$\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \wedge (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A **sans quantificateurs**, il existe une formule A' **sans quantificateurs** en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les équivalences suivantes:

| | | |
|-----------------------|----------|--------------------------------|
| $A \rightarrow B$ | \equiv | $\neg A \vee B$ |
| $\neg \neg A$ | \equiv | A |
| $\neg(A \wedge B)$ | \equiv | $\neg A \vee \neg B$ |
| $\neg(A \vee B)$ | \equiv | $\neg A \wedge \neg B$ |
| $A \vee (B \wedge C)$ | \equiv | $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |

La FNC d'une formule n'est pas unique.

Exemple:

$$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \top.$$

Donc,

$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et \top sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses \mathcal{C}_G t.q

- $VI(\mathcal{C}_1) \cap VI(\mathcal{C}_2) = \emptyset$ si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}_G$ et $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$
- G a un modèle ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ a un modèle.

Preuve :

- 1 D'abord de G on fixe $G_1 = cle(G)$. G a un modèle ssi G_1 a un modèle.
- 2 Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ pour éliminer les implications de G_1 . On obtient une formule $G_2 \equiv G_1$.
- 3 Calculer G_3 , la forme préfixe de G_2 . On a $G_3 \equiv G_2$.
- 4 Calculer $G_4 = \forall x_1 \dots \forall x_m A$ ($m \geq 0$), la Skolemisation de G_3 .
On a que G_4 a un modèle ssi G_3 a un modèle.
- 5 Calculer la forme normal conjonctive de A dont les variables sont $\{x_1, \dots, x_m\}$. On obtient $G_5 = \forall x_1 \dots \forall x_m (C_1 \wedge \dots \wedge C_n)$ ($m \geq 0, n \geq 0$). On a $G_5 \equiv G_4$.
- 6 Donner comme résultat $\mathcal{C}_G = \{C'_1, \dots, C'_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1, \dots, C_n\}$ afin d'éviter les variables communes. On a que G a un modèle ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ a un modèle.

Soit $clu(A)$ (resp. $cle(A)$) la clôture universelle (resp. existentielle) d'une formule A . Soit $clu(\Delta) = \{clu(A) \mid A \in \Delta\}$ et $cle(\Delta) = \{cle(A) \mid A \in \Delta\}$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit $FNC_\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$ un ensemble de formules où chaque E_i est une FNC de A_i . Soit \mathcal{C}_Δ l'ensemble de clauses de FNC_Δ construit comme

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{D_{i_1}, \dots, D_{i_k} \mid E_i \in FNC_\Delta \text{ et } E_i = D_{i_1} \wedge \dots \wedge D_{i_k}\}.$$

Alors l'ensemble de formules $clu(\Delta)$ a un modèle ssi l'ensemble de clauses $clu(\mathcal{C}_\Delta)$ a un modèle.

Exemple

$$G = \neg[[Q(a) \wedge (\forall x Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z Q(f(f(z)))]$$

- 1 $G_1 = G$.
- 2 $G_2 = \neg[\neg[Q(a) \wedge (\forall x (\neg Q(x) \vee Q(f(x))))] \vee \exists z Q(f(f(z)))]$.
- 3 $G_3 = \forall z \forall x \neg[\neg[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \vee Q(f(f(z)))]$.
- 4 $G_4 = G_3$.
- 5 $G_5 = \forall z \forall x [[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \wedge \neg Q(f(f(z)))]$.
- 6 $\mathcal{C}_G = \{Q(a), \neg Q(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$$G = (\exists y r(x, y) \vee \forall z q(z, z)) \wedge (\neg \forall x p(x)) \wedge p(u).$$

- 1 $G_1 = \exists u((\exists y r(x, y) \vee \forall z q(z, z)) \wedge (\neg \forall x p(x)) \wedge p(u)).$
- 2 $G_2 = G_1.$
- 3 $G_3 = \exists u \exists x' \exists y \forall z ((r(x, y) \vee q(z, z)) \wedge \neg p(x')) \wedge p(u).$
- 4 $G_4 = \forall z ((r(x, b) \vee q(z, z)) \wedge \neg p(a) \wedge p(c)).$
- 5 $G_5 = G_4.$
- 6 $C_G = \{r(x, b) \vee q(z, z), \neg p(a), p(c)\}.$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \dots, s_n)$ et $r(t_1, \dots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \dots, s_n) \quad \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si \perp est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution.

Notion de réfutation

Un ensemble de formules est **réfutable** ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient \perp .

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \dots, s_n) \quad C \vee \neg r(t_1, \dots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \text{ (coupure)}$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \text{ (factorisation)}$$

où

- $L = r(s_1, \dots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \dots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \dots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \dots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \dots, s_n \doteq t_n\}$

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

$$H_1: \exists x_0 t(x_0)$$

$$H_2: \forall x_2 (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$$

$$H_3: \forall x_3 \forall x_4 (\neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4))$$

$$H_4: \neg \forall x_5 (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$$

D'abord, on donne un ensemble de **clauses** C correspondant à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

Puis on donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\frac{\frac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg r(a, b)} \quad \frac{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2)}{d(b)}}{\neg d(b)} \quad \perp$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence logique de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

$$J_1: \exists x_0 t(x_0)$$

$$J_2: \forall x_2 (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$$

$$J_3: \forall x_3 \forall x_4 \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$$

$$J_4: \forall x_5 (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \wedge \neg J_4$ n'a pas de modèle (est réfutable).

Ensuite on donne un ensemble de **clauses** C dont la clôture universelle a un modèle ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \wedge \neg J_4$ a un modèle. On peut prendre J_1, J_2 , etc. et indépendamment calculer les clauses.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

On donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

Exemple II

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg r(a, b)}}{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2)} \\
 \frac{d(b) \quad \neg d(b)}{\perp}
 \end{array}$$

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x p(x) \vee \exists y \neg p(y)$ est valide.

D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.

On donne donc un ensemble de **clauses** C correspondant à $\neg J$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

On donne une **réfutation** de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \quad p(y)}{\perp}$$

Autres exemples avec formalisation : au tableau

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors le séquent $clo(\Delta) \vdash clo(A)$ est valide et si $clo(\Delta) \vdash_R \perp$, alors Δ n'a pas de modèle.

Théorème : La résolution est **complète** pour la réfutation, i.e., si $clo(\Delta)$ n'a pas de modèle, alors $\Delta \vdash_R \perp$.