La résolution pour le calcul des prédicats

Méthode par réfutation :
A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable (n'a pas de modèle) ssi
en appliquant la méthode de résolution à $\neg A$ on obtient une contradiction (réfutation).

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x.\ A \rightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\ B \rightarrow A & \\
\forall x.\ (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\ B \rightarrow A &
\end{array}
$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1x_1 \dots Q_nx_n\ A$, où chaque Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Exemples

$$
\begin{array}{lcl}
(\forall x\ p(x)) \wedge r(x) & \equiv & \forall y\ (p(y) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ (p(x) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \wedge r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \vee r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists y\ r(y)) & \equiv & \exists x\ \exists y\ (p(x) \rightarrow r(y)) \\
\neg[(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists y\ r(y))] & \equiv & \forall x\ \forall y\ \neg(p(x) \rightarrow r(y))
\end{array}
$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} \ldots Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n-aire. La formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} \ldots Q_{n+i} x_{n+i}\ \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}(A)$ est la skolemisation partielle de G.

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la skolemisation partielle de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\exists z\ \forall y\ s(a, a, z)$

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs $\exists$. La Skolemisation de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la Skolemisation de la formule G. Alors

- Si G contient n quantificateurs $\exists$, G' contient au plus n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la Skolemisation de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ s(i(x, y), x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\forall y\ s(a, a, b)$

Forme normale conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La clause vide s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive (FNC) ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La FNC vide s'écrit $\top$.

Exemples

$\top$ est une FNC. $\bot$ est une FNC.
$\neg p(h(x))$ est une FNC.
$\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.
$\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \wedge (\neg p(z) \to p(h(z)))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A sans quantificateurs, il existe une formule A' sans quantificateurs en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les équivalences suivantes:

$A \to B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Unicité

La FNC d'une formule n'est pas unique.
Exemple:
$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \top$.
Donc,
$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et $\top$ sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Vers la mise sous forme clausale

Soit $clu(A)$ (resp. $cle(A)$) la clôture universelle (resp. existentielle) d'une formule A. Soit $clu(\Delta) = \{clu(A) \mid A \in \Delta\}$ et $cle(\Delta) = \{cle(A) \mid A \in \Delta\}$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ un ensemble de formules où chaque E_i est une FNC de A_i. Soit C_Δ l'ensemble de clauses de FNC_Δ construit comme
$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k} \mid E_i \in FNC_\Delta \text{ et } E_i = D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}\}$.

Alors l'ensemble de formules $clu(\Delta)$ a un modèle ssi l'ensemble de clauses $clu(C_\Delta)$ a un modèle.

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- G a un modèle ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ a un modèle.

Preuve :

1. D'abord de G on fixe $G_1 = cle(G)$. G a un modèle ssi G_1 a un modèle.
2. Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ pour éliminer les implications de G_1. On obtient une formule $G_2 \equiv G_1$.
3. Calculer G_3, la forme prénexe de G_2. On a $G_3 \equiv G_2$.
4. Calculer $G_4 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m \ A$ $(m \geq 0)$, la Skolemisation de G_3. On a que G_4 a un modèle ssi G_3 a un modèle.
5. Calculer la forme normal conjonctive de A dont les variables sont $\{x_1, \ldots, x_m\}$. On obtient $G_5 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m \ (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)$ $(m \geq 0, n \geq 0)$. On a $G_5 \equiv G_4$.
6. Donner comme résultat $\mathcal{C}_G = \{C'_1, \ldots, C'_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1, \ldots, C_n\}$ afin d'eviter les variables communes. On a que G a un modèle ssi $clu(\mathcal{C}_G)$ a un modèle.

Exemple

$$G = \neg[[Q(a) \wedge (\forall x\ Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z\ Q(f(f(z)))]$$

1. $G_1 = G$.
2. $G_2 = \neg[\neg[Q(a) \wedge (\forall x\ (\neg Q(x) \vee Q(f(x))))] \vee \exists z\ Q(f(f(z)))]$.
3. $G_3 = \forall z\ \forall x\ \neg[\neg[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \vee Q(f(f(z)))]$.
4. $G_4 = G_3$.
5. $G_5 = \forall z\ \forall x\ [[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \wedge \neg Q(f(f(z)))]$.
6. $\mathcal{C}_G = \{Q(a), \neg Q(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$G = (\exists y \ r(x,y) \vee \forall z \ q(z,z)) \wedge (\neg \forall x \ p(x)) \wedge p(u)$.

1. $G_1 = \exists u((\exists y \ r(x,y) \vee \forall z \ q(z,z)) \wedge (\neg \forall x \ p(x)) \wedge p(u))$.
2. $G_2 = G_1$.
3. $G_3 = \exists u \ \exists x' \ \exists y \ \forall z \ ((r(x,y) \vee q(z,z)) \wedge \neg p(x') \wedge p(u))$.
4. $G_4 = \forall z \ ((r(x,b) \vee q(z,z)) \wedge \neg p(a) \wedge p(c))$.
5. $G_5 = G_4$.
6. $\mathcal{C}_G = \{r(x,b) \vee q(z,z), \neg p(a), p(c)\}$.

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes : aucun
Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \ (\mathit{coupure})$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \ (\mathit{factorisation})$$

où

- $L = r(s_1, \ldots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \ldots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \ldots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \ldots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \ldots, s_n)$ et $r(t_1, \ldots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \qquad \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution et $\Delta \vdash_R \perp$ si $\perp$ est dérivée à partir de l'ensemble Δ par résolution.

Notion de réfutation

Un ensemble de formules est réfutable ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient $\perp$.

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

H_1: $\exists x_0 \ t(x_0)$
H_2: $\forall x_2 \ (d(x_2) \to \forall x_1 r(x_1, x_2))$
H_3: $\forall x_3 \forall x_4 \ \neg(t(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3, x_4)$
H_4: $\neg \forall x_5 \ (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord, on donne un ensemble de clauses C correspondant à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.
$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$
Puis on donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\dfrac{d(b) \qquad \dfrac{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \qquad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \qquad q(b)}{\neg r(a, b)}}{\neg d(b)}}{\perp}$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence logique de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

J_1: $\exists x_0 \ t(x_0)$

J_2: $\forall x_2 \ (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1, x_2))$

J_3: $\forall x_3 \forall x_4 \ \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$

J_4: $\forall x_5 \ (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \wedge \neg J_4$ n'a pas de modèle (est réfutable).
Ensuite on donne un ensemble de clauses C dont la clôture universelle a un modèle ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \wedge \neg J_4$ a un modèle. On peut prendre J_1, J_2, etc. et indépendamment calculer les clauses.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

Exemple II

$$\dfrac{d(b) \qquad \dfrac{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \qquad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \qquad q(b)}{\neg r(a, b)}}{\neg d(b)}}{\perp}$$

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x\ p(x) \vee \exists y \neg p(y)$ est valide.
D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.
On donne donc un ensemble de clauses C correspondant à $\neg J$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \qquad p(y)}{\perp}$$

Autres exemples avec formalisation : au tableau

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors le séquent $clo(\Delta) \vdash clo(A)$ est valide et si $clo(\Delta) \vdash_R \bot$, alors Δ n'a pas de modèle.

Théorème : La résolution est complète pour la réfutation, i.e., si $clo(\Delta)$ n'a pas de modèle, alors $\Delta \vdash_R \bot$.