Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Deduction naturelle
  2. Calcul de Gentzen
  3. Résolution
     - ★ Théorie de l'unification
     - ★ Règles de résolution
     - ★ Propriétés de la résolution

Syntaxe: alphabet

- Les connecteurs $\rightarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$
- Les quantificateurs $\exists$, $\forall$
- Un ensemble dénombrable $\mathcal{X}$ de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature Σ contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, chacun ayant une arité.
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n.

Les termes

L'ensemble des termes par rapport à un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque variable x dans $\mathcal{X}$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et $f \in \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $\mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

L'ensemble des atomes sur un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0/0, S/1\}$ et $\Sigma_P = \{inf/2\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

L'ensemble des formules sur un ensemble de variable $\mathcal{X}$ et une signature Σ est noté $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque atome de $\mathcal{A}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, alors $\neg A$ est une formule dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A et B sont dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, et $(A \vee B)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ et x est une variable, alors $\forall x.\ (A)$ et $\exists x.\ (A)$ sont des formules dans $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Remarque :

- Nous omettons les parenthèses quand cela n'entraîne pas des ambiguités. Nous écrivons aussi $\forall x_1, \ldots, x_n.A$ pour $\forall x_1.\forall x_2.\cdots\forall x_n.A$

Exemple : $\forall x.\ (enfant(x) \rightarrow \exists y.\ mere(y, x))$

Un cas particulier

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide,
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (VI) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = \emptyset$.
- Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $VI(A) = VI(B) \cup VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \cup VE(C)$.
- Si $A = \forall x.\ B$ ou $A = \exists x.\ B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \cup \{x\}$.

Variables libres et liées

Exemple : Si $A = \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x.\ \exists x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

Définition : Soient A une formule et $x_1, \ldots, x_n$ ses variables libres.
La clotûre universelle de A est donnée par $\forall x_1, \ldots, x_n.A$
La clotûre existentielle de A est donnée par $\exists x_1, \ldots, x_n.A$

Exemple de renommage

La formule $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ peut se renommer en $\forall z\ \exists y\ p(z, y)$ $\forall x\ \exists z\ p(x, z)$ ou $\forall z\ \exists w\ p(z, w)$.
La formule $(\forall x\ p(x)) \vee p(x)$ peut se renommer en $(\forall z\ p(z)) \vee p(x)$.
La formule $\forall x\ \exists x\ p(x)$ peut se renommer en $\forall y\ \exists x\ p(x)$ ou $\forall x\ \exists y\ p(y)$ (mais pas en $\forall y\ \exists x\ p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$. On note $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\sigma(x) = x$ sinon.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitutions. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit Σ une signature et $\mathcal{X}$ un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t'_1, \ldots, t'_n)) = r(\sigma(t'_1), \ldots, \sigma(t'_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B \# C) = \sigma(B) \# \sigma(C)$
- $A = \forall x.\ B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x \notin Vl(t_i)$ et $x \neq x_i$ pour $i = 1 \ldots n$. Alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Que veut dire

$$\forall x.\ (H(x) \wedge M(x)) \qquad ?$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

Formalisation du langage naturel

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chats.
  $\exists x.\ (H(x) \wedge \mathit{Aimetousleschats}(x))$
  $\mathit{Aimetousleschats}(x) \equiv \forall y.\ (\mathit{Chat}(y) \rightarrow \mathit{Aime}(x, y))$
- Chaque humain sait qui le déteste.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow \mathit{Connaitdeteste}(x))$$

$$\mathit{Connaitdeteste}(x) \equiv \forall y.\ (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

Formalisation du langage naturel

- Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$
$$aimetoutlemonde(x) \equiv \forall y.\ Aime(x, y)$$
$$aimepersonne(x) \equiv \forall y.\ \neg Aime(x, y)$$

$$A_1 \equiv \forall x.\ (H(x) \rightarrow \exists y.\ Aime(x, y))$$
$$B_1 \equiv \neg \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$A_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$B_2 \equiv \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))$$

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : La structure (ou l'interprétation) $\mathcal{I}$ d'une signature Σ est un couple $\langle \mathcal{D}, I \rangle$ t.q.

- Le domaine $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide.
- I est une fonction.
- I associe à chaque $f \in \Sigma_F$ d'arité n dans son domaine une fonction totale $I(f) : \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$.

  Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $I(f)$ est une fonction constante.
- I associe à chaque $p \in \Sigma_P$ d'arité n dans son domaine une relation $I(p) \subseteq \mathcal{D}^n$. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléene totale $I(p) : \mathcal{D}^n \to \mathbf{BOOL}$.

  Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $\mathcal{I}(p)$ est $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$.
- I associe à chaque variable x de $\mathcal{X}$ dans son domaine une valeur $I(x) \in \mathcal{D}$.

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : Une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ est adaptée à un terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ si I est définie sur tous les symboles de fonction et tous les variables de t.

Définition : Une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ est adaptée à une formule A si I est définie sur tous les symboles de fonction, tous les symboles de prédicats et tous les variables libres de A.

Définition : Etant donnés une interprétation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ et une variable $x \in \mathcal{X}$ on écrit $\mathcal{I}[x := d]$ pour l'interprétation $\mathcal{I}' = \langle \mathcal{D}, I' \rangle$ telle que $I'(x) = d$ et $I'(y) = I(y)$ si $x \neq y$.

Valeur d'un terme

Définition : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interprétation adaptée. Alors la valeur d'un terme dans $\mathcal{I}$ est une fonction $[\_]_{\mathcal{I}} : \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto \mathcal{D}$ définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I}} = I(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(f)([t_1]_{\mathcal{I}} \ldots [t_n]_{\mathcal{I}})$

Des opérations sur l'ensemble **BOOL**

On définit sur l'ensemble **BOOL** $= \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ les opérations suivantes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} + \mathbf{V} &:= \mathbf{V} \qquad & \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} &:= \mathbf{V} \\
\mathbf{V} + \mathbf{F} &:= \mathbf{V} & \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} &:= \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{V} &:= \mathbf{V} & \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} &:= \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{F} &:= \mathbf{F} & \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} &:= \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

Valeur d'une formule

Définition : Soit $\mathcal{I} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ une interpretation adaptée. Alors la valeur d'une formule est une opération $[\_]_{\mathcal{I}} : \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto$ **BOOL** définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I}} = \mathcal{I}(p)([t_1]_{\mathcal{I}}, \ldots, [t_n]_{\mathcal{I}})$
- $[\neg A]_{\mathcal{I}} = \mathcal{FB}_{\neg}([A]_{\mathcal{I}})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I}} = \mathcal{FB}_{\#}([A]_{\mathcal{I}}, [B]_{\mathcal{I}})$
- $[\exists x.\ A]_{\mathcal{I}} = \Sigma_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I}[x:=d]}$ (somme)
- $[\forall x.\ A]_{\mathcal{I}} = \Pi_{d \in \mathcal{D}} [A]_{\mathcal{I}[x:=d]}$ (produit)

Exemple

Soit $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{I}(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$, $\mathcal{I}(b) = 2$, $\mathcal{I}(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$, $\mathcal{I}(q) = D$ et $\mathcal{I}(r) = \{(2, 2)\}$.

Interpréter les formules suivantes :

$(\forall x\ \forall y\ r(x, y) \wedge (\exists z\ r(z, z)))$

$(\exists x\ p(x, x, x)) \vee (\forall y\ \forall z\ r(y, z))$

$(\forall x\ \forall y\ r(b, b)) \rightarrow r(b, c(b))$

$\forall x\ (q(x) \rightarrow r(x, x))$

$\exists x\ \neg(q(x) \wedge r(x, x))$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- $\mathcal{I}$ satisfait une formule B (on dit aussi $\mathcal{I}$ est un modèle de B) si $[B]_{\mathcal{I}} = \mathbf{V}$.
- Une formule B est satisfaisable si elle a un modèle.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et Validité

Définition :

- L' interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle d'un ensemble de formules Δ ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de toutes les formules de Δ.
- La formule B est valide ssi toute interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle de B.

Soit B' la clotûre existentielle d'une formule B.

Lemme : Une interprétation $\mathcal{I}$ est un modèle pour B ssi $\mathcal{I}$ est un modèle pour B'.

Soit B'' la clotûre universelle d'une formule B.

Lemme : B est valide ssi B'' est valide.

Conséquence logique

Définition :

- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si tout modèle de Δ est aussi modèle de B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$
\begin{array}{lcl}
\exists y.\ \forall x.\ A & \models & \forall x.\ \exists y.\ A \\
\exists x.\ (A \land B) & \models & \exists x.\ A \land \exists x.\ B \\
\forall x.\ A \lor \forall x.\ B & \models & \forall x.\ (A \lor B)
\end{array}
$$

Quelques exemples d'équivalence

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & (\forall x.\ A) \rightarrow \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\, A & \equiv & \exists x.\, A & \equiv A \\
\forall x.\, (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\, B & \\
\forall x.\, (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\, B & \\
\exists x.\, (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x.\, B & \\
\forall x.\, (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x.\, B \rightarrow A & \\
\forall x.\, (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x.\, B \rightarrow A &
\end{array}
$$

La deduction naturelle pour le calcul des prédicats

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \vdash A$
Règles d'inférence (Rappel) :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow\ i) \qquad \frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B}\ (\rightarrow\ e)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B}\ (\wedge\ e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\Delta \vdash \neg\neg A}{\Delta \vdash A}\ (\neg e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)} \ (\forall x\ e)$$

L'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash \forall x.A} \ (\forall x\ i)$$

x n'est pas libre dans Δ

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A)}{\Delta \vdash \exists x.A}\ (\exists x\ i)$$

L'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Delta \vdash \exists x.A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B}\ (\exists x\ e)$$

x n'est pas libre dans Δ et B

Examples de dérivations: au tableau

Propriétés du système DN_{pred} pour le calcul des prédicats

Définition : (Rappel) Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ est valide.

Autrement dit, $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ est valide ssi tout modèle de $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un modèle de B.

Théorème : Le système DN_{pred} est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est complet, i.e., si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{pred}} A$.

Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$ (A est une formule du calcul des prédicats)
Règles d'inférence logiques (rappel) :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma}\ (\neg\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A}\ (\neg\ d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma}\ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma}\ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma}\ (\wedge\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma}\ (\wedge\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma}\ (\vee g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma}\ (\vee d)$$

Le système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Delta, \{x \leftarrow t\}(A), \forall x.A \vdash \Gamma}{\Delta, {\color{red}\forall x.A} \vdash \Gamma}\ (\forall\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash {\color{red}\forall x.A}, \Gamma}\ (\forall\ d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta, {\color{red}\exists x.A} \vdash \Gamma}\ (\exists\ g) \qquad \frac{\Delta \vdash \{x \leftarrow t\}(A), \exists x.A, \Gamma}{\Delta \vdash {\color{red}\exists x.A}, \Gamma}\ (\exists\ d)$$

Dans les règles $(\forall\ d)$ et $(\exists\ g)$ x n'est pas libre dans Δ et Γ.
Dans les règles $(\forall\ g)$ et $(\exists\ d)$ l'opération $\{x \leftarrow t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x) \vdash p(x), \exists y \neg p(y)}{\vdash p(x), \neg p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash \forall x.p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash (\forall x.p(x)) \vee (\exists y \neg p(y))}$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{p(a) \vdash p(a), \exists x.p(x)}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} \quad \dfrac{p(b) \vdash p(b), \exists x.p(x)}{p(b) \vdash \exists x.p(x)}}{p(a) \vee p(b) \vdash \exists x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, \exists z.q(z) \qquad \dfrac{p, q(x) \vdash q(x), \exists z.q(z)}{p, q(x) \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x), p \vdash \exists z.q(z)}}{p \to q(x) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\exists x.(p \to q(x)) \vdash p \to \exists z.q(z)}}{\vdash \exists x.(p \to q(x)) \to (p \to \exists z.q(z))}$$

Quatrième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p(a), p(f(a)) \vdash p(f(a)), p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}{p(a) \vdash p(f(a)), p(f(a)) \to p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{p(a) \vdash p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{\vdash p(a) \to p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}}{\vdash \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}$$

Cinquième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x), p(y) \vdash p(y), p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}{p(x) \vdash p(y), p(y) \to p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \forall y'.(p(y) \to p(y')), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{p(x) \vdash p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash p(x) \to p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \forall y.(p(x) \to p(y)), \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}}{\vdash \exists x.\forall y.(p(x) \to p(y))}$$

Sixième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Soit $A = \exists x\ \neg(\neg p(x) \wedge \neg Q(x))$, $B = \forall x\ p(x)$ et $C = \forall x\ Q(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(y), B, \neg q(y) \vdash p(y), A}{p(y), B, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ p(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{q(y), C, \neg p(y) \vdash q(y), A}{q(y), C, \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\forall x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}}{\dfrac{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \vdash A}{\dfrac{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x), \neg p(y) \wedge \neg q(y) \vdash A}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \vdash \neg(\neg p(y) \wedge \neg q(y)), A}}}}{\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \vdash \exists x\ \neg(\neg p(x) \wedge \neg q(x))}$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles $\forall\, g$ et $\exists\, d$).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ et $\Delta \vdash A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta, A \vdash \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \vdash \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$, alors $\Delta \vdash \Gamma, A$ l'est aussi.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ est valide.

Propriétés du système $\mathcal{G}$ pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.