EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 3

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS & GUILLAUME CHAPUY
–
M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 1 (Combinatoire des chemins)

Dans cet exercice on considère des chemins sur $\mathbb{Z}$ partant de 0, avec des pas d'incrément $+1$ ou -1. La longueur d'un chemin est son nombre de pas. On note $\mathcal{C}$ cette classe combinatoire. On note :

— $\mathcal{B}$ la classe des *ponts*, c'est à dire des chemins qui terminent en 0 (éventuellement de longueur nulle).
— $\mathcal{E}$ la classe des *excursions*, c'est à dire des ponts qui ne prennent jamais de valeurs strictement négatives. On les appelle également chemins de Dyck.
— $\mathcal{M}$ la classe des *méandres*, c'est à dire des chemins qui ne prennent jamais de valeurs négatives (et qui terminent à une position quelconque).

On note également $\mathcal{C}^{(k)}$ (respectivement $\mathcal{M}^{(k)}$) l'ensemble des chemins (respectivement, des méandres) qui terminent à la position k. On a $\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{E}$. On note $T = \{|\}$ une classe atomique formée d'un unique pas.

(i) Montrer à l'aide d'une décomposition adaptée que l'on a, pour $k > 0$:

$$\mathcal{M}^{(k)} \equiv \mathcal{E} \times (T\mathcal{E})^k.$$

(on pourra considérer le «dernier temps de passage» du chemin à la hauteur i, pour chaque $i \geq 0$.)

(ii) En déduire que le nombre $m_n^{(k)}$ de méandres de longueur n terminant à la position k est donné par une formule close que l'on déterminera.

(iii) On va retrouver ce résultat à l'aide d'une technique combinatoire appelée *principe de réflexion.* Pour cela, on va plutôt chercher à déterminer $c_n^{(k)} - m_n^{(k)}$, le nombre de chemins terminant en k, de longueur n, et qui passent au moins une fois par une valeur négative. En retournant verticalement la partie d'un tel chemin suivant son premier passage par -1, montrer qu'ils sont en bijection avec des chemins de longueur n qui n'ont d'autre contrainte que de terminer à une valeur négative fixée que l'on déterminera. Conclure.

(iv) À l'aide de décompositions du type de la question (i), montrer *sans calcul* que $B(t)^2 = \frac{1}{1-4t^2}$. Retrouver ensuite, sans calcul ou presque, le résultat vu au TD précédent : le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ où chaque chemin est pondéré par son aire, est 4^n. Indication : on jouera aux legos avec les excursions.

(v) Retrouver encore le résultat de (ii)-(iii), cette fois à l'aide d'une variante bien sentie du lemme cyclique.

Exercice 2

À l'aide de séries exponentielles, donner une formule close (contenant une somme) pour le nombre de permutations de taille n ayant exactement k points fixes.

Exercice 3 (Composition)

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux classes combinatoires (toutes deux étiquetées, ou toutes deux non étiquetées), on définit la classe $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ comme l'ensemble :

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{A}_k \times SEQ_k(\mathcal{B}).$$

Autrement dit, un élément de $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ est formé d'un élément de $\mathcal{A}$ dont chaque «atome de taille» est décoré par un élément de $\mathcal{B}$.

(i) Montrer que si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ alors $C(t) = A(B(t))$, où A et B sont les séries exponentielles ou ordinaires selon que les classes soient étiquetées ou non.

(ii) Se convaincre que l'on a, en fait, déjà vu cela, au moins pour la classe $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

(iii) À titre d'exemple, montrer que les séries génératrices des arbres binaires et des arbres unaires-binaires (sommets d'arité un ou deux) sont reliées par la formule $M(z) = B\left(\frac{z}{1-z}\right)$.

Exercice 4 (graphes d'excès fixé)
On considère dans cet exercice les graphes comme des objets étiquetés (sur les sommets), autrement dit l'ensemble des sommets sera toujours de la forme $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On définit l'excès d'un graphe connexe $G = (V, E)$ comme $ex(G) := |E| - |V| + 1$. Autrement dit, c'est le nombre d'arêtes en plus par rapport à un arbre couvrant de G.

(i) Un (multi) graphe est *pur* s'il ne contient pas de sommets de degré 1 et 2. Montrer que pour tout $k \geq 1$, le nombre de multigraphes connexes purs d'excès k est fini.

(ii) Montrer qu'à tout graphe G, on peut associer un certain multigraphe pur obtenu par élagage récursif des feuilles de G, puis lissage de ses sommets de degré 2. On l'appelera le *noyau* de G.

(iii) Écrire la série génératrice des graphes de noyau fixé N. En déduire que pour $k \geq 1$, la série génératrice exponentielle des graphes d'excès k est de la forme

$$W_k(z) = \frac{P_k(T)}{(1-3T)^k},$$

où P_k est un polynôme de degré $3k+2$ et où $T \equiv T(z)$ est la série des arbres de Cayley, $T(z) = ze^T(z)$.

(iv) Quel est le rayon de convergence de cette série ? Quels noyaux contribuent le plus à la singularité ? (cette question prendra tout son sens quand on aura vu les théorèmes de transfert).

Exercice 5
Redémontrer le résultat du cours donnant les valeurs propres du graphe produit $G \times H$ en fonction de celles de G et de H, directement au moyen des séries génératrices exponentielles (on pourra tenter de compter directement les marches closes de longueur ℓ sur $G \times H$).

Exercice 6 (Inversion de Lagrange)

(i) Sous les hypothèses du cours, à savoir $F(t) = t\phi(F(t))$, montrer la forme un peu plus générale de la formule d'inversion de Lagrange :

$$[t^n]H(F(t)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\Big(H'(u)\phi(u)^n\Big).$$

(ii) On se donne $k \geq 1$ et des séries $F_i(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{Q}[[t_1, \ldots, t_k]]$ pour $i \leq k$. On suppose qu'on a un système de k équations polynomiales de la forme :

$$F_i = t_i g_i(F_1, \ldots, F_k), \qquad 1 \leq i \leq k$$

où on note $F_i \equiv F_i(t_1, \ldots, t_k)$ et où les g_i sont des polynômes. Que «compte» ce système ? Montrer que l'on a :

$$[x^n]F_1 = [x^n]\left(x_1 \prod_{i=1}^{k} g_i(x)^{n_i} \det\left(\delta_{i,j} - \frac{x_i}{g_j(x)}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\right)_{1\leq i,j\leq k}\right),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $n = (n_1, \ldots, n_k)$ et où x^n désigne $x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$.