EXERCICES DE COMBINATOIRE – FEUILLE 1

MATTHIEU JOSUAT-VERGÈS – M2 MATHS FONDAS PARIS 7 (2019).

Exercice 0 (binomiaux)

(i) On rappelle que $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de $[1..n]$ à k éléments. Montrer que ce nombre est égal à $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ ou encore $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(ii) Pour $n, k \geq 0$ entiers, donner sans calcul une formule pour :

— le nombre de sous-ensembles de $[1..n]$;
— le nombre de sous-ensembles de $[1..n]$ à $n-k$ éléments ;
— le nombre de compositions de n en parts non-nulles, *i.e.* les uplets $(n_1, \dots, n_\ell)$ d'entiers strictement positifs où $\ell \geq 0$ et $\sum n_i = n$ (ici ℓ n'est pas fixé) ;
— le nombre de compositions de n en ℓ parts, éventuellements nulles (ici ℓ est fixé).
— le nombre de chemins dans $\mathbb{Z}^2$ allant de $(0,0)$ à (n,k) et utilisant uniquement des pas Nord et Est.

Les réponses sont soit des binomiaux bien sentis, soit des puissances de 2. Démontrer en une phrase la formule du triangle de Pascal, et en une autre l'identité suivante :

$$\sum_{\substack{p+q=k \\ p,q\geq 0}} \binom{n}{p}\binom{m}{q} = \binom{m+n}{k}.$$

Exercice 1 (Binôme de Newton généralisé)

On fixe un entier $\ell \geq 1$.

(i) Démontrer *sans calcul* l'identité suivante :

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^\ell = \sum_{n\geq 0} \binom{n+\ell-1}{n} z^n.$$

(on aura juste à interpréter le membre de gauche à l'aide du dictionnaire entre séries et classes combinatoires).

(ii) Expliquer en quoi cela traite le cas de ℓ complexe.

Exercice 2. (mots) On se fixe un alphabet $\mathcal{A}$ de cardinal $m \geq 2$, et un mot $p = p_1 \dots p_k$ de longueur k. Pour $i \in [0..k-1]$ on pose $c_i = 1$ si $p_{i+1}p_{i+2}\dots p_k = p_1 p_2 \dots p_{k-i}$ avec les indices pris modulo k, et $c_i = 0$ sinon. On note $c(z) := \sum_{i=0}^{k-1} c_i z^i$ le *polynôme d'autocorrélation* de p.

Montrer que la série génératrice (par la longueur) des mots sur $\mathcal{A}$ qui évitent le mot p comme facteur, est égale à

$$S(z) = \frac{c(z)}{z^k + (1-mz)c(z)}.$$

Exemple : si $p = aabbaa$, on a $c(z) = 1 + z^4 + z^5$. Graphiquement, $c_i = 1$ signifie que si l'on superpose p avec son ième décalage, les lettres à l'intersection des deux décalages sont égales, par exemple ici

$$\begin{array}{l} aabb\mathbf{aa} \\ \quad\;\;\, \mathbf{aa}bbaa \end{array}$$

et les parties grasses coïncidant on a $c_4 = 1$.

Indication (essayer sans !) on introduira une classe combinatoire supplémentaire $\mathcal{T}$, des mots qui contiennent une unique occurrence de p et se terminent par cette occurrence. On cherchera des relations entre S et T.

Exercice 3 (Nombres de Catalan)

Démontrer que les familles d'objets combinatoires ci-dessous sont comptés par les nombres de Catalan (en donnant une décomposition de classe combinatoire, en donnant une bijection avec une autre famille catalane, ou par une autre méthode).

(i) Les suites décroissantes d'entiers positifs $(v_1, \ldots, v_n)$ avec $v_i \leq n - i$.

(ii) Les *chemins de Łukasiewicz* de longueur n, i.e. chemins de $(0,0)$ à $(n,0)$ dans $\mathbb{N}^2$ avec des pas $(1, i)$ pour $i \geq -1$ entier.

(iii) Les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles qu'il n'existe pas de triplet (i, j, k) avec $1 \leq i < j < k \leq n$ et $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k)$.

(iiii) Les suites décroissantes d'entiers positifs $(v_1, \ldots, v_n)$ avec $v_1 \leq n$ et $\sum_{i=1}^{n} v_i$ divisible par n+1.

Exercice 4 (Coefficients q-binomiaux)

Soit q une indéterminée. On définit, pour n entier positif :

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad [n]_q! = \prod_{i=1}^{n} [i]_q, \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

pour $1 \leq k \leq n$, et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$.

(i) Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ est un polynôme en q, à coefficients entiers positifs, dont les coefficients forment une suite palindromique, et qui s'évalue à $\binom{n}{k}$ quand $q = 1$.

(ii) Démontrer l'identité :

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{j(m-k+j)}.$$

Indication Montrer d'abord que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum q^{i(w)}$ où la somme porte sur les mots binaires contenant k uns et $n-k$ zéros, et $i(w)$ est une statistique bien choisie.

Exercice 5

Un graphe (non dirigé) est biparti s'il est possible de partionner son ensemble V de sommets en deux classes, $V = U \uplus U'$, de telle sorte que toute arête relie un sommet de U à un sommet de U'.

(i) Montrer que G est biparti ssi il ne contient pas de cycle de longueur impaire ;

(ii) Montrer que G est biparti ssi les valeurs propres de la matrice d'adjacence de G sont symétriques par l'opération $\lambda \mapsto -\lambda$.

(iii) Pour $n, m \geq 1$, le *graphe biparti complet* $K_{n,m}$ est le graphe à $n + m$ sommets défini comme suit : il y a n sommets blancs, m sommets noirs, et toutes les arêtes possibles reliant un sommet blanc à un sommet noir sont présentes (ce graphe a donc mn arêtes). Montrer que les valeurs propres de la matrice d'adjacence de $K_{n,m}$ sont

$$+\sqrt{mn}, -\sqrt{mn}, 0, \ldots, 0.$$

(où 0 apparaît avec multiplicité $n + m - 2$).