Examen M2 Maths Fondas 2019
–
Combinatoire II

Lundi 16 décembre 2019

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On prendra garde à remplir les entêtes de copies et à ne pas quitter la salle sans avoir signé la liste et vérifié que sa copie a été remise.
Les notes de cours manuscrites (de CE cours) sont autorisées, ainsi que les feuilles d'exercices.
You can write your answers in English.

Exercice 1

Pour $n \geq 1$ note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des suites $\vec{\lambda} = (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(2n)})$ de partitions telles que

$$\emptyset = \lambda^{(0)} \prec \lambda^{(1)} \succ' \lambda^{(2)} \prec \lambda^{(3)} \succ' \lambda^{(4)} \cdots \prec \lambda^{(2n-1)} \succ' \lambda^{(2n)} = \emptyset.$$

Le poids $w(\vec{\lambda})$ associé à $\vec{\lambda}$ est le produit des $\displaystyle\prod_{i=1}^{2n} q_i^{\left||\lambda^{(i+1)}|-|\lambda^{(i)}|\right|}$, pour des indéterminées q_i.

Question 1 Exprimer la fonction de partition $A_n(\mathbf{q}) = \sum_{\vec{\lambda} \in \mathcal{A}_n} w(\vec{\lambda})$ comme un produit scalaire de vide à vide faisant intervenir les opérateurs vus en cours.

Question 2 Calculer $A_n(\mathbf{q})$ et en déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Exercice 2

On rappelle l'identité de Jacobi-Trudi duale : si λ est une partition telle que $\lambda_1 \leq n$, alors

$$s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_j - j + i}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

où λ' est la conjuguée (la transposée) de λ, avec la convention $e_k = 0$ si $k < 0$. On se propose dans cet exercice de donner une démonstration combinatoire directe de cette identité, similaire à la démonstration de l'identité primale vue en cours.

Question 3 Proposer un ensemble de pas, et des poids, tels que $e_k(x_1, x_2, \dots)$ soit la fonction génératrice des chemins infinis dans le quart de plan supérieur allant de $(p, 0)$ à $(p+k, \infty)$, pour toute abscisse p.
Si l'on est mal à l'aise avec les chemins infinis, on pourra supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de variables non nulles $x_1, x_2, \dots, x_m$ et considérer des chemins qui terminent en $(p+k, m)$.

Question 4 Conclure (on pourra associer un chemin à chaque colonne de λ).

Exercice 2

On rappelle la définition des éléments de Jucys-Murphy $J_1, \ldots, J_n$, dans l'algèbre $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ du groupe symétrique :

$$J_i = (1, i) + (2, i) + \cdots + (i - 1, i) = \sum_{j=1}^{i-1} (j, i).$$

Question 5 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation et $\ell \geq 1$ un entier. Montrer que le coefficient de l'identité dans $\left(\sum_{i=1}^{n} J_i\right)^{\ell} \sigma$ est égal au nombre de factorisations de σ en ℓ transpositions.

Question 6 (question indépendante). Un produit de transpositions $\tau_1 \ldots \tau_\ell$ est dit *monotone* si en écrivant chaque τ_i comme $\tau_i = (a_i, b_i)$ avec $a_i < b_i$, alors on a $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_\ell$. Autrement dit, leurs plus grands éléments apparaissent en ordre croissant. Montrer que le coefficient de l'identité dans $\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-uJ_i}\right) \sigma$ est la série génératrice des factorisations de σ en produit monotone de transpositions, où l'exposant de u marque le nombre de transpositions.

Question 7 Exprimer le nombre de factorisations d'une permutation σ fixée en produit de ℓ transpositions à l'aide de caractères du groupe symétrique et de la quantité $S(\lambda)$ définie comme la somme des contenus des cases de la partition λ.

Question 8 On regarde la mesure de probabilité de Plancherel sur les partitions, où la partition λ reçoit la probabilité $\frac{(f^\lambda)^2}{n!}$. Montrer que sous cette loi, l'espérance de $S(\lambda)^2$ est égale à $\binom{n}{2}$.

Question 9 On considère ℓ transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ et une permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ telles que $\tau_\ell \tau_{\ell-1} \ldots \tau_2 \tau_1 = \sigma$. À une telle donnée, on associe un multigraphe G, d'ensemble de sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$, avec une arête de i à j pour chaque k tel que $\tau_k = (i, j)$. On suppose que G est connexe. Les arêtes de G sont naturellement étiquetées de 1 à ℓ, et ses sommets de 1 à n. On munit ce graphe d'une structure de carte en décidant qu'autour de chaque sommet, l'ordre antihoraire des arêtes autour du sommet est donné par l'ordre croissant des étiquettes, en partant de l'étiquette minimale incidente à ce sommet. Décrire une règle combinatoire permettant de retrouver les cycles de σ directement à partir de la carte et de ses étiquettes. À quoi correspond la longueur d'un cycle dans cette correspondance ?

Question 10 On reprend hypothèses et notations de la question précédente. Quel est le genre de la carte obtenue ?

Exercice 4

Pour $k \geq 1$ et $\lambda \vdash k$, on note $2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots)$ la partition dont les parts sont le double de celles de λ. On considère la fonction symétrique

$$V_k := \sum_{\lambda \vdash k} s_{2\lambda}.$$

Question 11 Exprimer $\frac{\partial}{\partial p_1} V_k$ en fonction de V_{k-1}.

Question 12 Pour une partition μ, on note f^μ le nombre de tableaux standard de forme μ. Exprimer f^μ comme une extraction de coefficient dans s_μ. Puis en utilisant la question précédente en déduire la valeur de la quantité c_k définie par

$$c_k := \sum_{\lambda \vdash k} f^{2\lambda}.$$

Exercice 5

On considère l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ par conjugaison sur l'ensemble des permutations de type cyclique λ. C'est donc une représentation de dimension $|\mathcal{C}_\lambda|$. On note U_λ l'image de cette représentation par l'application caractéristique, c'est-à-dire la fonction symétrique définie par :

$$U_\alpha := \sum_{\alpha \vdash n} \chi(\alpha) \frac{p_\alpha}{z_\alpha},$$

où χ est le caractère de cette représentation.

Question 13 Montrer que $n!\langle U_\lambda | \frac{1}{z_\mu} p_\mu \rangle$ est égal au nombre $C_{\lambda,\mu}$ de paires de permutations qui commutent et sont type cyclique respectifs λ et μ, où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire de Hall.

Question 14 On considère l'action adjointe de $\mathfrak{S}_n$, càd $\mathfrak{S}_\mathfrak{n}$ agit sur lui-même par conjugaison. Montrer que son image par l'application caractéristique est $\frac{1}{n!} \sum_\lambda p_\lambda$.

Question 15 Si λ et μ n'ont pas de parts communes, montrer que $U_\lambda U_\mu = U_{\lambda \cup \mu}$, où $\lambda \cup \mu$ est la partition formée de l'union des parts de λ et de μ (réordonnées en ordre décroissant pour former une partition).

Question 16 **(*)** On note $[2^k]$ la partition de $2k$ dont toutes les parts sont égales à 2. Montrer que $U_{[2^k]}$ est égale à la quantité V_k de l'exercice précédent. On pourra relier la restriction $Res\Big\downarrow_{\mathfrak{S}_{2k-1}}^{\mathfrak{S}_{2k}} U_{[2^k]}$ à l'induction $Ind\Big\uparrow_{\mathfrak{S}_{2k-2}}^{\mathfrak{S}_{2k-1}} U_{[2^{k-1}]}$