Examen M2 Maths Fondas 2019
–
Combinatoire I

Jeudi 24 Octobre 2019

On attachera une grande importance à la concision, à la clarté, et à la précision de la rédaction. On prendra garde à remplir les entêtes de copies et à ne pas quitter la salle sans avoir signé la liste et vérifié que sa copie a été remise.
Les notes de cours manuscrites (de CE cours) sont autorisées, ainsi que les feuilles d'exercices.
You can write your answers in English.

Exercice 1

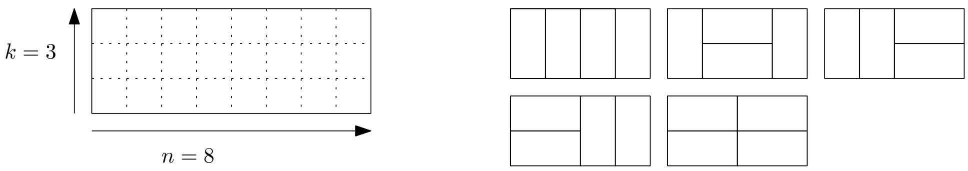

FIGURE 1 – Gauche : le rectangle considéré pour $(n,k)=(8,3)$.
Droite : les 5 pavages de taille 4 pour $k=2$.

Pour $n \geq 0$ et $k \geq 1$, on considère un rectangle de dimensions $n \times k$ (Figure 1) dont le coin inférieur gauche est l'origine. Un *pavage* de ce rectangle est une manière de le recouvrir entièrement par des *dominos* (rectangles de dimensions 2×1 ou 1×2 à coordonnées entières), de sorte que les dominos ne se chevauchent pas (voir Figure 1). On appelle k la *hauteur* et n la *taille* du pavage.

Pour $k \geq 1$ fixé, on note $\mathcal{P}^{(k)}$ la classe combinatoire dont les éléments sont tous les pavages de hauteur k, munis de cette notion de taille.

Question 1 Calculer la série génératrice $P^{(k)}$ de $\mathcal{P}^{(k)}$, pour $k=1$. Puis faire de même pour $k=2$, par exemple à l'aide d'une récurrence de type Fibonacci.

Question 2 On considère le cas $k=3$. Un pavage du rectangle $n \times 3$ est *minimal* s'il ne contient pas une ligne verticale de hauteur 3 qui le sépare en deux pavages par dominos plus petits (chacun de taille non nulle). Décrire les pavages minimaux, puis calculer à la main la série $P^{(3)}$.

Question 3 Montrer, sans forcément s'inspirer des questions précédentes, que pour tout $k \geq 1$ fixé, la série génératrice $P^{(k)}$ de $\mathcal{P}^{(k)}$ est rationnelle.

Exercice 2

Dans cette exercice toutes les cartes sont planaires et enracinées. Une carte (planaire, enracinée) est *précubique* si elle n'a que des sommets de degré 1 ou 3, et si elle est enracinée sur un sommet de degré 1. On rappelle que *l'excès* d'un graphe à m arêtes et p sommets est défini comme $m-p+1$.

Question 4 Soit M une carte précubique ayant n sommets de degré 3 et excès k. Exprimer son nombre d'arêtes, son nombre de sommets de degré 1, et son nombre de faces en fonction de n et k.

Question 5 On considère des cartes précubiques d'excès 0 (arbres). Montrer que leur série génératrice en fonction du nombre de sommets de degré 3 satisfait $T = 1 + tT^2$. Montrer (au moyen d'une décomposition combinatoire directe) que la série génératrice des cartes précubiques d'excès 0 ayant un sommet de degré 1 marqué (différent de la racine) est donnée par $\frac{1}{1-2tT(t)}$

Question 6 Pour $k \geq 1$, montrer à l'aide d'une décomposition de type «noyau» que la série génératrice C_k des cartes précubiques d'excès k est une fraction rationnelle en T, dont on précisera le dénominateur.

Question 7 Analyser la singularité dominante de la série C_k, et en déduire que pour k fixé et $n \to \infty$ le nombre de cartes précubiques d'excès k est équivalent à $c\rho^n n^{\alpha_k}$ pour des constantes ρ et α_k que l'on précisera.

Exercice 3

On note $\mathcal{S}_n^{(k)}$ l'ensemble des partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k parties disjointes non vides, et $\mathcal{S}^{(k)} = \cup_{n\geq 1}\mathcal{S}_n^{(k)}$ la classe combinatoire correspondante, à k fixé. Les k parties ne sont pas numérotées. On note $S(n, k)$ le cardinal de $\mathcal{S}_n^{(k)}$. Par exemple $S(3, 2) = 3$ correspondant aux trois partitions $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 3\} \cup \{2\}$.

Question 8 Donner une expression de $\mathcal{S}^{(k)}$ avec les constructeurs usuels, et en déduire une formule sous forme de somme pour $S(n, k)$.

Question 9 Montrer, indépendamment, que $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.

Question 10 En déduire que l'on peut interpréter $S(n, k)$ comme le nombre de chemins à n pas sur $\mathbb{Z}^2$ faisant des pas $(1, 0)$ ou des pas $(1, 1)$, où les pas reçoivent un poids en fonction de leur hauteur.

Question 11 On fixe $n, m \geq 1$. On considère dans cette question des n-uplets de chemins $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$, où pour $1 \leq i \leq n$, P_i est un chemin de longueur $m + i$, partant du point de $\mathbb{Z}^2$ de position $(-i, 0)$. Les pas de ces chemins reçoivent les poids introduits à la question précédente. Un n-uplet de chemins est non-intersectant si aucune paire de chemins ne partagent de sommet.

Montrer *combinatoirement* que

$$(\det S(m+i, j))_{1\leq i,j\leq n} = (n!)^m.$$

On pourra montrer que seules les configurations non-intersectantes contribuent au déterminant.

Exercice 4

Un arbre de Cayley est un graphe acyclique connexe sur l'ensemble de sommets $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note respectivement $T_u(t), T(t), T_a(t)$ les séries génératrices exponentielles (par le nombre de sommets) des arbres de Cayley, des arbres de Cayley avec un sommet marqué, des arbres de Cayley avec une arête marquée. On a vu en cours que $T(t) = te^{T(t)}$.

Question 12 Écrire la relation entre nombre de sommets et d'arêtes dans un arbre, puis en déduire une relation entre T_u, T, et T_a.

Question 13 Exprimer T_a en fonction de T. En déduire T_u en fonction de T.

Question 14 Une forêt de Cayley de taille n est un graphe acyclique sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On note $F(t)$ la série génératrice correspondante, calculer F en fonction de T.

Question 15 Quand n tend vers l'infini, estimer la probabilité qu'une forêt de Cayley à n sommets, choisie uniformément au hasard, soit un arbre.

Question 16 (*) Soit F_n une forêt de Cayley à n sommets, choisie uniformément au hasard. Pour $k \geq 1$ fixé, donner la loi limite du nombre de sommets de degré k de F_n.

Exercice 5

Soit $k \geq 1$ et $\leq_P$ un ordre (partiel) sur $\{1, 2, \dots, k\}$ tel que $i \leq_P j \Rightarrow i \leq j$. Une *$P$-partition* de taille n est une suite $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ d'entiers positifs ou nuls, de somme n, telle que $i \leq_P j \Rightarrow \lambda_i \leq \lambda_j$.

Question 17 Montrer que pour k et P fixés, la série génératrice des P-partitions est rationnelles et préciser son dénominateur (on n'utilisera pas le théorème général, non démontré en cours, sur les séries génératrices de comptage de points dans les polyhèdres – ou alors on le démontrera !).