Décidabilité

Exercice 1

Un état inutile d'une machine de Turing est un état qui n'est jamais visité pendant un calcul.

1. Montrer que le problème de décider si une machine de Turing a des états inutiles est indécidable.

2. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer le théorème de Rice pour résoudre ce problème.

Exercice 2 **Séparation de langages**

Soient deux langages disjoints. On dit qu'un langage C *sépare* A et B si $A \subseteq C$ and $B \subseteq \bar{C}$.

1. Si A et $\bar{A}$ ne sont séparés par aucun langage décidable, que peut-on en déduire ?

2. Montrer qu'il existe des langages récursivement énumérables qui ne sont séparés par aucun langage décidable.

3. Monter que deux langages co-récursivement énumérables sont toujours séparés par un langage décidable.

Exercice 3

Le problème de pavage de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est défini par :

Donnée : un ensemble fini $T = \{t_0, \ldots, t_k\}$ de tuiles et deux sous-ensembles H, V de $T \times T$. (Les relations de compatibilité horizontale et verticale).

Question : existe-t-il une fonction de pavage $f : Z \times Z \to T$ telle que $f(1,1) = t_0$ et, pour tout $i, j2 \in \mathbb{N}$, $(f(i,j), f(i+1,j)) \in H$ et $(f(i,j), f(i,j+1)) \in V$.

Nous allons considérer un problème restreint, celui des tuiles de Wang. Un ensemble de tuiles de Wang est un ensemble de carrés dont chaque côté est coloré, ne pouvant pas tourner. Dans un pavage de Wang, les ensembles H et V contiennent donc tous les couples de tuiles tels que les côtés qui se touchent sont de même couleur.

Montrer que le problème du pavage de Wang est co-récursivement énumérable mais pas récursivement énumérable.

Exercice 4 **Théories logiques**

Montrer que les théories suivantes sont décidables :

1. $(\mathbb{N}, <)$.

2. $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \times)$.

Exercice 5

Une fonction $f : A^* \to A^*$ est calculable s'il existe une MT qui s'arrête sur chaque entrée $x \in A^*$ et écrit $f(x)$ sur sa bande de sortie.

1. Montrer en utilisant un argument de dénombrement qu'il existe des fonctions de $\{0,1\}^*$ vers $\{0,1\}^*$ qui ne sont pas calculables.

2. Si f est une fonction calculable, montrer que l'ensemble d'arrivée de la fonction est un langage récursivement énumérable.

3. Donner un exemple explicite de fonction calculable f dont l'ensemble d'arrivée n'est pas un langage décidable.