Automates à pile

Exercice 1

Donner des automates à pile qui reconnaissent les langages suivants :

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* \mid |u|_a = 2|u|_b\}$.

2. $L_2 = \{u \in \{a,b\}^* \mid \bar{u} = u\}$, où $\bar{u}$ est le miroir de u.

3. $L_3 = \{u\#\bar{v} \mid u, v \in \{0,1\}^*$ et $\exists i \in \mathbb{N},\ u = bin(i)$ et $v = bin(i+1)\}$, où $bin(i)$ est la représentation en base 2 de i.

Exercice 2

Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques :

1. $L_1 = \{a^i b^j c^i d^j \mid; 0 \leq i, j\}$.

2. $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i \leq j \leq k\}$.

Exercice 3 — **Mélange de Langages**

Soit Σ un alphabet fini. Soient u et v deux mots sur Σ^*. On appelle mélange des mots u et v, et l'on note $\mathrm{Mel}(u,v)$ l'ensemble des mots de Σ^* défini par :

- si $u = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{v\}$
- si $v = \varepsilon$, $\mathrm{Mel}(u,v) = \{u\}$
- si $u = xu'$ et $v = yv'$ avec $x, y \in \Sigma$, $\mathrm{Mel}(u,v) = x.\mathrm{Mel}(u',v) \cup y.\mathrm{Mel}(u,v')$

Si L et L' sont deux langages, on définit $\mathrm{Mel}(L,L') = \bigcup_{u\in L, v\in L'} \mathrm{Mel}(u,v)$

1. Le mélange de deux langages rationnels est-il toujours rationnel ?

2. Montrer que le mélange d'un langage rationnel et d'un langage algébrique est algébrique.

3. Qu'en est-il du mélange de deux langages algébriques ?

Exercice 4 — **Bord d'un langage**

Soit L un langage. On définit

$\mathrm{BORD}(L) = \{w \in \Sigma^*, \exists x, y, z \in \Sigma^*, |x| = |y| = |z|, w = xz$ et $xyz \in L\}$

1. Montrer que pour un langage L rationnel alors $\mathrm{BORD}(L)$ n'est pas nécessairement rationnel.

2. Montrer que pour un langage L rationnel alors $\mathrm{BORD}(L)$ est algébrique.

3. Et si L est algébrique ?

Exercice 5 — **Langages algébriques linéaires**

Une grammaire $G = (A, V, P)$ est dite *linéaire* si chacune des ses règles $S \to w$ vérifie $w \in A^*VA^* + A^*$. Un langage $L \subseteq A^*$ est dit *linéaire* s'il est engendré par une grammaire linéaire.

1. Montrer que l'image $\mu(L)$ par un morphisme $\mu : A^* \to B^*$ d'un langage linéaire est un langage linéaire.

2. Montrer que l'intersection d'un langage linéaire et d'un langage rationnel est un langage linéaire.

Pour une configuration $C = (q, f, h)$ d'un automate à pile, on note $|C| = |h|$ le nombre de symboles dans la pile. Un automate à pile $\mathcal{A}$ est dit *à pic* si pour tout calcul $C_0 \rightsquigarrow C_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow C_n$, il existe un entier $0 \leq k \leq n$ tel que pour tout entier $0 \leq i < n$, si $i < k$, $|C_i| \leq |C_{i+1}|$ et si $i \geq k$, $|C_i| \geq |C_{i+1}|$.

3. Montrer qu'un langage linéaire est accepté par un langage à pic.

On s'intéresse maintenant à la réciroque.

4. Montrer que tout automate à pile $\mathcal{A}$ est équivalent à un automate à pile $\mathcal{A}'$ dont chacune des transitions $q, y, z \to q', h$ vérifie $|h| \leq 2$. Montrer en outre que si l'automate $\mathcal{A}$ est à pic, alors l'automate $\mathcal{A}'$ peut aussi être choisi à pic.

5. Montrer que tout automate à pic $\mathcal{A}$ est équivalent à un automate à pile $\mathcal{A}'$ dont chacune des transitions $q, y, z \to q', h$ vérifie $h = \varepsilon$, $h = z$ ou $h \in Zz$ oà Z est l'alphabet de pile de $\mathcal{A}'$.

Soit $\mathcal{A}$ un automate à pic. On introduit une nouvelle lettre a_τ pour chaque transition τ et $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}'$ l'automate obtenu en remplaçant chaque transition $\tau = q, y, z \to q', h$ par la transition $q, a_\tau, z \to q', h$.

6. Montrer que si le langage accepté par $\mathcal{A}'$ est linéaire, alors le langage accepté par $\mathcal{A}$ est linéaire.

Soit $\mathcal{A}$ un automate à pic ayant les deux propriétés suivantes. Chacune de ses transitions τ est de la forme $q, a_\tau, z \to q', h$ avec $h = \varepsilon$, $h = z$ ou $h \in Zz$ oà Z est l'alphabet de pile de $\mathcal{A}$. On introduit un automate $\mathcal{A}_0$ sans pile et un automate $\mathcal{A}_1$ sans état. Les états (resp. initiaux et terminaux) de $\mathcal{A}_0$ sont ceux de $\mathcal{A}$ et ses transitions sont de la forme $q \xrightarrow{a_\tau} q'$. L'automate $\mathcal{A}_1$ a un seul état q_1 qui est initial et final. Son alphabet de pile est celui de $\mathcal{A}$ et ses transitions sont les transitions $q_1, a_\tau, z \to q_1, h$.

7. Montrer que le langage accepté par $\mathcal{A}$ est l'intersection des langages acceptés par $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$.

8. Montrer que le langages accepté par $\mathcal{A}_1$ est linéaire.

9. Montrer qu'un langage accepté par un automate à pic est linéaire.