Grammaires algébriques

Exercice 1

Les langages suivants sont-il algébriques ? Le cas échéant, donner une grammaire algébrique qui l'engendre.

1. $\{a^m b^n c^p,\ m \neq n\}$
2. $\{a^n b^p,\ p \in [n, 2n]\}$
3. $\{a^{n^2},\ n \geq 0\}$
4. $\{u,\ u = \bar{u}\}$ (on rappelle que $\bar{u}$ est le miroir de u).
5. Les mots bien parenthésés (on pourra considérer n types de parenthèses différents, $a_k, \bar{a_k}$, $1 \leq k \leq n$).

Exercice 2 — **Non-stabilité par complémentation**

Soit $A = \{a, b\}$.

1. Montrer que le langage $L = \{uu \mid u \in A^*\}$ n'est pas algébrique
2. Donner une grammaire algébrique qui engendre son complémentaire.

Exercice 3

Quels sont les langages engendrés pas les grammaires suivantes :

1.

$$S \to aS \mid aSbS \mid \varepsilon$$

2.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} S & \to & aSBC \mid aBC & bB & \to & bb \\ CB & \to & BC & bC & \to & bc \\ aB & \to & ab & cC & \to & cc \end{array}$$

Exercice 4 — **Langage inhéremment ambigü**

Soit $L = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$. On veut montrer qu'il n'existe pas de grammaire non-ambigüe qui engendre ce langage.

1. Donner une grammaire engendrant ce langage.
2. Déduire du lemme d'Ogden appliqué à $u = a^k b^k c^{k+k!}$ pour un k assez grand la forme des dérivations possible pour u.
3. En déduire que le mot $a^{k+k!} b^{k+k!} c^{k+k!}$ se dérive d'au moins deux manières différentes.

Exercice 5 — **Grammaires linéaires droites et langages rationnels**

On appelle *grammaire linéaire droite* une grammaire dont les règles de production sont dans $V \times A^*V \ \cup V \times A^*$.

1. Montrer qu'un langage rationnel est engendré par une grammaire linéaire droite.
2. Montrer qu'une grammaire linéaire droite engendre un langage rationnel.

Exercice 6 **Langage de Lukasiewicz**

Soit $A = \{a, b\}$, et $G = (A, \{S\}, \{S \to aSS \mid b\})$ et L le langage des mots u satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(i) $|u|_b = |u|_a + 1$.

(ii) pour tout préfixe propre v de u, $|v|_a \geq |v|_b$.

Montrer que L est exactement le langage engendré par G.

On appelle ce langage, le *langage de Lukasiewicz*, inventeur de la notation polonaise.

Exercice 7 **Test d'appartenance**

Soit $G = (A, V, S, P)$ une grammaire en forme normale de Chomsky.

1. Montrer que si un mot u est engendré par un non-terminal A, alors il existe des mots u_1 et u_2 respectivement engendrés par B et C tels que $A \to BC \in P$.

2. En déduire un algorithme en $O(n^3)$ capable de tester si un mot u, $|u| = n$ est engendré par G.