Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz

1 Introduction

Soit $\mathbf{F}_q$ le corps de cardinal q. Soit p la caractérisrique de $\mathbf{F}_q$. On définit par analogie avec le cas réel :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}_q[x],$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_q(x),$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_q((1/x)) = \{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{x^n};\ a_n \in \mathbf{F}_q \text{ et les } (a_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls}\}.$$

Le corps $\mathbf{R}$ est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valuation $1/x$-adique. Enfin, on définit $\mathbf{C}$ comme le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{R}$; $\mathbf{C}$ est donc algébriquement clos.

Carlitz a défini dans [4] deux fonctions ψ et λ sur $\mathbf{F}_q((1/x))$, qui jouent respectivement les rôles de l'exponentielle et du logarithme réels. Ces fonctions sont ainsi définies :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{q^k}}{F_k} \quad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbf{F}_q((1/x)), \\ \lambda(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{q^k}}{L_k} \quad \text{pour tout } t \text{ tel que } d^\circ t \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } [k] &= x^{q^k} - x, \\ F_k &= [k][k-1]^q ... [1]^{q^{k-1}}, \\ L_k &= [k][k-1]...[1]. \end{aligned}$$

Carlitz a montré que l'on peut étendre la définition de λ à $\mathbf{F}_q((1/x))$, (voir [4]). La fonction λ ainsi obtenue est alors l'inverse de la fonction ψ. Carlitz a également montré l'existence d'une période pour la fonction ψ : on a, pour tout t appartenant à R et pour tout E appartenant à Z,

$$\psi(t+E\xi)=\psi(t), \text{ avec } \xi=(x^q-x)^{1/(q-1)}\Pi \text{ et } \Pi=\prod_{j=0}^{+\infty}(1-\frac{x^{q^j}-x}{x^{q^{j+1}}-x}).$$

La série formelle Π joue bien évidemment le rôle du réel π et ξ est l'analogue de $2i\pi$.

Wade a montré diverses propriétés de transcendance concernant ces deux fonctions, qui mettent en évidence l'analogie avec le cas réel. Il a établi, en particulier, deux résultats à mettre en correspondance avec les théorèmes de Hermite-Lindemann et de Gelfond-Schneider, à savoir :

- Si α est un élément non nul de $\mathbf{F}_q((1/x))$ algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, alors $\psi(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ sont transcendants, (voir [19]).
- Si α est non nul et β un élément de $\mathbf{F}_q((1/x))$ irrationnel alors l'un des trois nombres α, β, $\psi(\beta\lambda(\alpha))$ est transcendant. Si α est nul et si l'on remplace $\lambda(0)$ par $E\xi$, où E appartient à $\mathbf{F}_q[x]$ et $\xi=(x^q-x)^{\frac{1}{q-1}}\Pi$, alors la conclusion reste vraie, (voir [20]).

On déduit, en particulier, du premier de ces résultats, la transcendance de Π. Yu a également montré, dans [23] et [24], ces deux propriétés, dans un cadre plus général.

Carlitz a également défini sur $\mathbf{F}_q(x)$ une fonction ζ, analogue à la fonction ζ de Riemann. Elle est définie de la façon suivante :

$$\zeta(m)=\sum_{G\in\mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m\ , \quad m\geq 1.$$

Il existe plusieurs méthodes conduisant à des résultats de transcendance sur les valeurs des fonctions ψ, λ et ζ de Carlitz (voir [21]) :

- la méthode de Wade reprise par Damamme et Hellegouarch, ainsi que par Thakur ; elle est à certains égards l'analogue de la méthode classique pour les nombres réels (voir [9], [10], [11], [12], [17] et [18]),
- les modules de Drinfeld utilisés par Yu ; il s'agit d'une généralisation des courbes elliptiques, (voir [14] et [15]); c'est la méthode la moins élémentaire mais aussi celle qui donne actuellement le plus de résultats (voir [22]),
- les mesures d'irrationalité sur lesquelles travaillent De Mathan et Chérif (voir [5], [6] et [7]),
- enfin les automates qui ont permis à Allouche de donner une preuve "élémentaire" de la transcendance de la période Π de l'exponentielle.

Il s'agit ici de généraliser cette dernière méthode pour l'étendre à d'autres résultats.

En fait, Allouche a montré dans [1], en utilisant les automates et plus précisément le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, la transcendance de α/Π, avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty}(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}).$$

En élevant α à la puissance q, on constate que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$. On déduit donc la transcendance de Π de celle de α/Π.

Rappelons l'énoncé du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy (voir [8]) :

Théorème 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy)
Soit $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :
1) la série formelle $\sum_{n\geq 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$,
2) l'ensemble $\mathcal{U}$ de sous-suites de la suite $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ défini par

$$\mathcal{U} = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbf{N}};\ k \geq 0;\ 0 \leq r \leq q^k - 1\}$$

est fini.

Nous nous proposons de donner ici une preuve "automatique" du résultat suivant :

Théorème 2 *Soit P une fraction de la forme $P = \sum_{v\geq -1} p_v(1/x)^v$ où $p_v \in \mathbf{F}_q$ et $p_v = 0$, pour v assez grand. On a alors : $\frac{\lambda(P)}{\Pi^s}$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-3$ et pour $q \neq 2$, $q \neq 3$.*

Nous étudierons en fait le quotient $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$. Multiplier par α^s permet d'obtenir un développement simple en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$ (afin d'utiliser le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy) sans pour autant influer sur la transcendance de $\frac{\lambda(P)}{\Pi^s}$, puisque α est algébrique.

Remarques Ce résultat peut être déduit de l'analogue du théorème de Gelfond-Schneider : Denis a, en effet, remarqué qu'on peut ainsi montrer la transcendance de $\frac{\lambda(P)}{\Pi^s}$, où P est une série formelle algébrique, pour $q \neq 2$ (voir [13]).

Pour $q = 3$, il est possible de montrer par les automates la transcendance de $\frac{\lambda(P)}{\Pi}$, mais ce résultat demande plus de travail.

On peut également retrouver partiellement et de façon élémentaire, par cette même méthode, un résultat de Yu, à savoir la transcendance de $\frac{\zeta(s)}{\Pi^s}$, pour $1 \leq$

$s \leq q-2$, (voir [2] et [3]). Cette propriété de transcendance a été démontrée par Yu dans [22], pour tout s non divisible par $q-1$, (voir aussi [17] et [18]).

Enfin, Y.Hellegouarch a généralisé l'exponentielle de Carlitz en définissant une exponentielle associée à une suite périodique d'endomorphismes. F. Recher a montré, dans [16], par les automates, la transcendance de la période de cette exponentielle généralisée, pour certains choix d'endomorphismes.

2 Quelques développements en série formelle

On a $\lambda(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{q^k}}{L_k}$, pour t tel que $d^\circ t \leq 1$. Soit $P = \displaystyle\sum_{v \geq -1} p_v (1/x)^v$, où $p_v \in \mathbf{F}_q$ et $p_v = 0$, pour v assez grand. On se restreint à des exposants $v \geq -1$, pour des raisons de convergence.

La fonction λ est linéaire sur $\mathbf{F}_q$ et $p_v = 0$, pour v assez grand. On en déduit que :

$$\lambda(P) = \lambda(\sum_{v \geq -1} p_v (1/x)^v) = \sum_{v \geq -1} p_v \lambda((1/x)^v).$$

On a donc

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{v \geq -1} p_v (\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)).$$

2.1 Notations

Nous allons introduire dans cette section quelques suites auxiliaires utiles pour le développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$. Nous allons développer successivement les termes $\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)$, $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\lambda((1/x)^v))$ et enfin $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$.

Considérons le terme $\lambda((1/x)^v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/x)^{vq^k}}{L_k}$.

Rappelons que $L_k = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (x^{q^j} - x)$.

Par conséquent,

$$\lambda((1/x)^v) = (1/x)^v + \sum_{k \geq 1} (1/x)^{vq^k} \prod_{j=1}^{k} (\frac{1}{x^{q^j} - x}).$$

On a

$$\alpha = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}) \text{ et } \Pi = \prod_{j=0}^{+\infty} (1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}).$$

On vérifie alors que

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}).$$

Il en résulte que

$$\lambda((1/x)^v) = (1/x)^v + \sum_{k\geq 1}(1/x)^{(q+\ldots+q^{k-1}+(v+1)q^k)} \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-(\frac{1}{x})^{q^j-1})} \ .$$

En multipliant $\lambda((1/x)^v)$ par α/Π, on obtient donc :

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)) = \frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v + \sum_{k\geq 1}(1/x)^{(q+\ldots+q^{k-1}+(v+1)q^k)} \prod_{j=k+1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}).$$

On définit alors les suites $a^v = (a^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$, $b^v = (b^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $c^v = (c^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante :

$$\frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v = \sum_{n\geq 0} a^v(n)x^{-n},$$

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\lambda((1/x)^v) - (1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} b^v(n)x^{-n},$$

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}.$$

On a donc $c^v = a^v + b^v$.

Considérons maintenant le développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)$. On a :

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}}(\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)).$$

Soit $A^{s-1} = (A^{s-1}(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$\frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}} = \sum_{n\geq 0} A^{s-1}(n)x^{-n}.$$

On a

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}}(\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)) = (\sum_{n\geq 0} A^{s-1}(n)x^{-n})(\sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} x^{-n}[\sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)c^v(n-k)].$$

On définit alors les suites $e^v = (e^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$, $f^v = (f^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $g_v = (g^v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante :

$$e^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)c^v(n-k),$$

$$f^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)a^v(n-k),$$

$$g^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)b^v(n-k).$$

On a $e^v = f^v + g^v$ et $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} e^v(n)x^{-n}$.

On a, enfin :

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{v\geq -1} p_v(\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)).$$

On définit donc, de même, les suites $E = (E(n))_{n\in\mathbf{N}}$, $F = (F(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $G = (G(n))_{n\in\mathbf{N}}$:

$$E(n) = \sum_{v\geq -1} p_v e^v(n)$$

$$F(n) = \sum_{v\geq -1} p_v f^v(n)$$

$$G(n) = \sum_{v\geq -1} p_v g^v(n)$$

On a $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{n\geq 0} E(n)x^{-n}$ et $E = F + G$.

2.2 Quelques Propriétés

Nous allons établir, dans cette section, des propriétés concernant les suites a^v, b^v (proposition 1), la suite A^{s-1} (proposition 2) et enfin les suites f^v et g^v (proposition 3). Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 *Soit $j \geq 1$. Si n s'écrit sous la forme*

$$n = r + \sum_{l=j+1}^{+\infty} \mu_l (q^l - 1) \tag{1}$$

avec $\mu_l \in \{0, 1, ..., q-1\}$, $\mu_l = 0$, pour j assez grand et $0 \leq r \leq (q-1)(q^j - 1)$, une telle décomposition est unique.

Preuve du lemme 1 : Considérons une décomposition de n sous forme (1). Si $n = r$, on a nécessairement, pour tout l : $\mu_l = 0$. Supposons alors $n \neq r$. Soit L le plus grand indice l tel que $\mu_l \neq 0$.
On a, pour tout $m \geq 1$:

$$(q-1) \sum_{i=1}^{m} (q^i - 1) < q^{m+1} - 1.$$

D'où

$$r + \sum_{l=j+1}^{L} \mu_l (q^l - 1) < q^{L+1} - 1.$$

Par conséquent, si n admet deux telles décompositions, les indices des plus grands termes non nuls seront égaux. Supposons alors qu'il existe $(\delta_t)_{j+1 \leq t \leq L}$ à coefficients dans $\{0, 1, ..., q-1\}$ et ρ avec $0 \leq \rho \leq (q-1)(q^j - 1)$, tels que

$$n = r + \sum_{l=j+1}^{L} \mu_j (q^j - 1) = \rho + \sum_{t=j+1}^{L} \delta_t (q^t - 1), \text{ avec } \mu_L \neq 0 \text{ et } \delta_L \neq 0.$$

Supposons, de plus, que $\delta_L \neq \mu_L$ et que, par exemple, $\mu_L > \delta_L$. On a alors

$$n - \delta_L (q^L - 1) \geq q^L - 1 > \sum_{t=j+1}^{L-1} \delta_t (q^t - 1) + \rho = n - \delta_L (q^L - 1),$$

ce qui est impossible. Par conséquent $\delta_L = \mu_L$. On montre ainsi, par récurrence, que $\mu_l = \delta_l$, pour $l \geq j+1$. On en déduit alors que $r = \rho$, ce qui achève la preuve du lemme 1.

On a les propriétés suivantes concernant les suites a^v, b^v, c^v :

Proposition 1 *1. On a : $a^v(n) \neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous la forme*

$$v + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j (q^j - 1), \text{ avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \ \varepsilon_j = 0 \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

2. Si $b^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme

$$n = q + ... + q^{i-1} + q^i(v+1) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1), \qquad (2)$$

$$\textit{avec } i \geq 1, \varepsilon_j = 0 \textit{ ou } 1, \textit{ et } \varepsilon_j = 0 \textit{ pour } j \textit{ assez grand.}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve de la proposition 1 :

Lemme 2 *Soit $(a_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par*

$$\prod_{j=k+1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}) = \sum_{n\geq 0} a_k(n)x^{-n}.$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1) \textit{ avec } \varepsilon_j = 0 \textit{ ou } 1, \varepsilon_j = 0 \textit{ pour } k \textit{ assez grand,} \qquad (3)$$

$$\textit{alors } a_k(n) = (-1)^{\sum_{j=k+1}^{+\infty} \varepsilon_j},$$

sinon $a_k(n) = 0$.

La preuve de ce lemme résulte immédiatement de l'unicité de la décomposition de n sous forme (3) qui découle elle-même du lemme 1.

Preuve de la proposition 1 : Rappelons que $\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{+\infty}(1 - (\frac{1}{x})^{q^j-1}) = \sum_{n\geq 0} a_0(n)x^{-n}$.

Par conséquent, $\frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v = \sum_{n\geq 0} a_0(n)x^{-(n+v)} = \sum_{n\geq v} a_0(n-v)x^{-n}$.

Or $a_0(n) \neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous forme (3) selon le lemme 2, ce qui achève la preuve de 1.

On a[1] $\frac{\alpha}{\Pi}(\lambda((1/x)^v) - (1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} x^{-n} \sum_{k\geq 1} a_k(n - (q + ... + q^{k-1} + (v+1)q^k))$.

Par conséquent, 2 résulte du lemme 2.

Remarque On ne peut rien dire quant à une réciproque dans 2. En effet, il peut exister plusieurs décompositions de n sous la forme (2). Chacune de ces décompositions apporte un coefficient de valeur absolue égale à 1. Or on est en caractéristique p. Par conséquent, on peut éventuellement avoir $b^v(n) \equiv 0 \ (p)$, si n s'écrit sous forme (2). Néanmoins, si la décomposition de n est unique, alors $b^v(n) \neq 0$.

[1] On pose, pour $n < 0$, $a_k(n) = 0$.

Considérons le développement en série formelle de $\frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}}$. On a la proposition suivante :

Proposition 2 *Soit* $1 \leq t \leq q-1$. *Soit* $(A^t(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^t}{\Pi^t} = \sum_{n\geq 0} A^t(n)x^{-n}.$$

Si n *s'écrit*

$$n = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j \in \{0,1,...,t\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand,}$$

$$\text{alors } A^t(n) = (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty}\mu_j} \prod_{j=1}^{+\infty} \overline{\binom{\mu_j}{t}},$$

sinon $A^t(n) = 0$.

Preuve On a

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{+\infty}(1-(\frac{1}{x})^{q^j-1})^t &= (\sum_{n\geq 0} a_0(n)x^{-n})^t \\ &= \sum_{n\geq 0} x^{-n}(\sum_{n_i\geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^t n_i = n} \prod_{i=1}^t a_0(n_i)).\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Soient $n_1, ..., n_t$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^t n_i,\ \prod_{i=1}^t a_0(n_i) \neq 0 \text{ et pour tout } i,\ n_i \geq 0.$$

D'après le lemme 2, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j} = 0$ ou 1, tels que pour tout i, $\varepsilon_{i,j} = 0$ pour j assez grand et $n_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}(q^j-1)$. Nécessairement, n s'écrit sous la forme suivante :

$$n = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j-1) \text{ avec } \mu_j \in \{0,1,...,t\}, \mu_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous cette forme. Considérons un t-uplet tel que

$$n = \sum_{i=1}^{t} n_i, \ \prod_{i=1}^{t} a_0(n_i) \neq 0 \text{ et pour tout } i, \ n_i \geq 0.$$

Pour un tel t-uplet, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j} = 0$ ou 1, tels que pour tout i, $\varepsilon_{i,j} = 0$ pour j assez grand et $n_i = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}(q^j - 1)$. Or $n = \sum_{i=1}^{t} n_i = \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}(q^j - 1) = \sum_{j=1}^{+\infty}(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_{i,j})(q^j - 1)$.

Il résulte du lemme 1 que, pour tout j : $\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_{i,j} = \mu_j$.

Par conséquent, il existe $\prod_{j=1}^{+\infty} \binom{t}{\mu_j}$ t-uplets de la forme cherchée.

On a alors

$$\prod_{i=1}^{t} a_0(n_i) = \prod_{i=1}^{t} (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_{i,j}} = (-1)^{\sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}} = (-1)^{\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j}.$$

Pour achever la preuve de la proposition 2, il suffit d'ajouter que l'on est en caractéristique p.

Nous allons déduire des propositions 1 et 2 la proposition suivante concernant les suites f^v et g^v :

Proposition 3 *1. Si $f^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme*

$$n = v + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1), \ \textit{avec } 0 \leq \mu_j \leq s. \tag{4}$$

2. Si $g^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme

$$n = q + ... + q^{i-1} + q^i(v+1) + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1), \tag{5}$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \mu_j \leq s - 1$, pour $1 \leq j \leq i$ et $0 \leq \mu_j \leq s$, pour $j \geq i + 1$.

3. Si $n = v + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1)$, avec $\mu_j = 0$ ou s, pour tout j, et si n se décompose de manière unique sous la forme (4) alors $f^v(n) \neq 0$.

Preuve :

- **Preuve de 1 :**

  Soit n tel que $f^v(n) \neq 0$. On a $f^v(n) = \sum_{l=0}^{n} A^{s-1}(l)a^v(n-l)$. Soit l tel que $0 \leq l \leq n$, et $A^{s-1}(l)a^v(n-l) \neq 0$. On a alors, d'après les propositions 1 et 2 :

  $$l = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_i(q^i - 1), \text{ avec } \delta_i \in \{0, ..., s-1\}, \delta_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

  $$n - l = v + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1), \text{ avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \varepsilon_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

  Par conséquent,

  $$n = v + \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i(q^i - 1), \text{ avec } 0 \leq \mu_i \leq s.$$

- **Preuve de 2 :**

  Soit n tel que $g^v(n) \neq 0$. On a $g^v(n) = \sum_{l=0}^{n} A^{s-1}(l)b^v(n-l)$. Si, pour $0 \leq l \leq n$, $A^{s-1}(l)b^v(n-l) \neq 0$, alors il existe

  $(\delta_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\delta_j \in \{0, ..., s-1\}, \delta_j = 0$ pour j assez grand, tels que $l = \sum_{j=1}^{+\infty} \delta_j(q^j - 1)$,

  $i \geq 1$, $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou $1, \varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tels que

  $$n - l = q + ... + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \varepsilon_j(q^j - 1),$$

  Par conséquent,

  $$n = q + ... + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1),$$

  avec $i \geq 1$, $0 \leq \mu_j \leq s-1$, pour $1 \leq j \leq i$ et $0 \leq \mu_j \leq s$, pour $j \geq i+1$.

- **Preuve de 3 :**

  Soit $n = v + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1)$, avec $\mu_j = 0$ ou s, pour tout j, et tel que n se décompose de manière unique sous la forme (4). Il existe alors un unique

l tel que $0 \leq l \leq n$ et tel que $A^{s-1}(l)a^v(n-l) \neq 0$. En effet, si J est l'ensemble des indices j tels que $\mu_j \neq 0$, on a, d'après les propositions 2 et 3.1 :

$$l = \sum_{j \in J} (s-1)(q^j - 1),$$

$$n - l = v + \sum_{j \in J} (q^j - 1).$$

On en déduit que $f^v(n) = A^{s-1}(l)a^v(n-l) \neq 0$, ce qui achève la preuve de 3.

3 Schéma de la preuve du théorème 2

Considérons les sous-suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$, afin d'appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, pour montrer la transcendance de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$. Nous supposerons $1 \leq r \leq q-2$ et nous fixerons la valeur de r ultérieurement, au paragraphe 6.1.

Notons que l'on suppose $s \leq q-3$. Nous supposerons donc, jusqu'à la fin, $q \neq 2$ et 3. La nécessité de cette limitation, pour la méthode employée, intervient dans la preuve du lemme 4, remarque 3, au chapitre 5.

Nous allons étudier , à $v \geq -1$ fixé, les sous-suites $(f^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$ et montrer les deux lemmes suivants, aux paragraphes 4 et 5 :

Lemme 3 *Soit $k \geq 2$. Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $-r + q^k + v - (q-2)(q + ... + q^{k-1})$ par s. Soit $m^v(k) = -1 + s(1 + ... + q^{u(k)-1}) + v(k)q^{u(k)}$. On a, pour tout $n < m^v(k)$: $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.*

Lemme 4 *Soit $k \geq d+3$, où $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$, si $v \geq 1$ et $d = 0$, sinon. Soient $x(k)$ et $y(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne par s de $-r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + ... + q) - s(d+1)$.*
Soit $n^v(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x(k)-1}) + y(k)q^{x(k)}$.
On a, pour tout $n < n^v(k)$: $g^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

On a $m^v(k) > n^v(k)$, pour tout $k \geq d+3$ et $e^v = f^v + g^v$. Le lemme suivant résulte donc des lemmes 3 et 4 :

Lemme 5 *Soit $k \geq d+3$. On a, pour tout $n < n^v(k)$: $e^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.*

Or $E = \sum_{p_v \neq 0} p_v e^v$ où l'ensemble $\{v \; ; \; p_v \neq 0\}$ est fini, d'où la proposition 4 :

Proposition 4 *Soit* $n(k) = \inf\{n^v(k);\ v$ *tel que* $p_v \neq 0\}$. *On a, pour* k *assez grand et pour tout* $n < n(k)$: $E(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Pour tout v, la suite $(n^v(k))_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, la suite $(n(k))_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$. Les sous-suites $(E(q^k n+r+(q-2)(q+...+q^{k-1})))_{n\in\mathbf{N}}$ commencent donc par une plage de 0 (non forcément maximale) dont la longueur tend vers $+\infty$.

On montre, de plus, au paragraphe 6, qu'il existe un entier $n_0(k)$ tel que, pour une infinité de k, $E(q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. Or on a le lemme suivant :

Lemme 6 *Soit* $(v_k)_{k\in\mathbf{N}} = ((v_k(n))_{n\in\mathbf{N}})_{k\in\mathbf{N}}$ *une famille de sous-suites de la suite* $v = (v(n))_{n\in\mathbf{N}}$ *telle que :*

1. *Il existe un entier* $m(k)$ *tel que l'on ait, pour tout* $n < m(k)$: $v_k(n) = 0$.
2. *La suite* $(m(k))_{k\in\mathbf{N}}$ *tend vers* $+\infty$.
3. *Les suites* v_k *sont non identiquement nulles pour une infinité de* k.

L'ensemble $\{v_k;\ k \in \mathbf{N}\}$ *est alors infini.*

Il résulte de ce lemme que l'ensemble $\{(E(q^k n+r+(q-2)(q+...+q^{k-1})))_{n\in\mathbf{N}}\}$ est infini. Du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on déduit la transcendance de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q \neq 2$, 3 et $1 \leq s \leq q-3$, et, par conséquent, celle de $\frac{\lambda(P)}{\Pi^s}$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

Il reste à montrer le lemme 6.

Preuve D'après la condition 3, il existe un ensemble infini d'entiers $\mathcal{K}$ tel que pour tout k de $\mathcal{K}$, la suite v_k soit non nulle. Par conséquent, il existe pour tout k de $\mathcal{K}$ un entier $m'(k)$ tel que l'on ait, pour tout $n < m'(k)$: $v_k(n) = 0$ et $v_k(m'(k)) \neq 0$. On a alors, d'après 1, $m(k) \leq m'(k)$.

Nous allons construire par récurrence une suite $(k_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante :

- Soit $k_1 \in \mathcal{K}$.
- Supposons $k_1, ..., k_j$ définis. Soit $k_{j+1} \in \mathcal{K}$ tel que $m(k_{j+1}) > \sup\{m'(k_1), ..., m'(k_j)\}$. L'existence de k_{j+1} est assurée par la condition 2.

On a alors $\sup\{m'(k_1), ..., m'(k_j)\} < m(k_{j+1}) \leq m'(k_{j+1})$. On a, par conséquent, pour tout j : $v_{k_{j+1}} \notin \{v_{k_1}, ..., v_{k_j}\}$.

On a donc construit une suite $(k_j)_{j\in\mathbf{N}}$ telle que $\{v_{k_j};\ j \in \mathbf{N}\}$ est infini, ce qui achève la preuve du lemme 6.

4 Preuve du lemme 3

Soit $v \geq -1$ fixé. Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. Selon la proposition 3.1, il existe

$(\mu_j)_{j \in \mathbf{N}}$ avec $\mu_j \in \{0, ..., s\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = v + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1).$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j$. On a

$$q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = v + \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j q^j + \sum_{l \geq k} \mu_l q^l - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-2)) q^j + v - r,$$

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{l \geq k} \mu_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j<k} \mu_j \\ &= \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j - (q-2)) q^j - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j + v - r. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (6), n vérifie l'inégalité $n \geq m^v(k)$, avec

$$m^v(k) = -1 + s(1 + ... + q^{u(k)-1}) + v(k) q^{u(k)},$$

où $u(k)$ et $v(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité
$-r + q^k + v - (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. On en déduira, selon la proposition 3.1, que pour tout $n < m^v(k)$: $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$.

Notons qu'une condition nécessaire pour que n s'écrive sous la forme (6) est : $\mathcal{S} \geq 0$.

On vérifie que si $\lambda \geq 1$, $\mathcal{S}$ vérifie l'inégalité $\mathcal{S} \geq -r + \lambda q^k + v - (q-2)(q + ... + q^{k-1})$ et que pour $\lambda \leq 0$, on a $\mathcal{S} < 0$.

Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (6), avec $\lambda = 1$, on obtient : $n \geq m^v(k)$. En revanche, pour $\lambda \geq 2$, on a, si n s'écrit sous la forme (6) :

$$n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{u'(k)-1}) + v'(k)q^{u'(k)},$$

où $u'(k)$ et $v'(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r + \lambda q^k + v - (q-2)(q + ... + q^{k-1})$. Or on vérifie que $m^v(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{u'(k)-1}) + v'(k)q^{u'(k)}$, pour tout $\lambda \geq 2$.

On a donc montré que pour tout λ tel que $\mathcal{S}$ prenne des valeurs positives et donc pour tout n s'écrivant sous la forme (6), on obtient $n \geq m^v(k)$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

5 Preuve du lemme 4

Soit $v \geq -1$ fixé. Soit $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$, si $v \geq 1$ et $d = 0$, sinon. Soit $k \geq d + 3$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $g^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. Selon la proposition 3.2, il existe

$i \geq 1$, $(\mu_j)_{j\in\mathbf{N}}$ avec $0 \leq \mu_j \leq s-1$, pour $j \leq i$ et $0 \leq \mu_j \leq s$, pour $j \geq i+1$, tels que

$$q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1}) = q + ... + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j (q^j - 1).$$

On pose $\sigma = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j$.

Nous allons distinguer trois cas suivant la position de i par rapport à k :

Cas 1 : Si $i \geq k$, on a[2]

$$q^k n + r = \sum_{j=k}^{i-1} q^j + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j + \sum_{j \geq k} \mu_j q^j - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - r + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j,$$

[2] On convient, si $m < l$, de poser $\displaystyle\sum_{j=l}^{m} q^j = 0$.

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{j=k}^{i-1} q^{j-k} + (v+1)q^{i-k} + \sum_{l \geq k} \mu_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{j=k}^{i-1} q^{j-k} + (v+1)q^{i-k} + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \tag{7}$$

$$\text{avec } \mathcal{S} = \lambda q^k - r + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-3))q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j.$$

On montre, de même qu'au paragraphe 4, que si n s'écrit sous la forme (7), n vérifie l'inégalité $n \geq n_1(k)$, avec $n_1(k)$ obtenu pour $i = k$, $\lambda = 1$ et tel que

$$n_1(k) = v + (s-1) + s(q + ... + q^{x_1(k)}) + y_1(k) q^{x_1(k)+1},$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $q^k - r - (q-3)(q + ... + q^{k-1}) - (s-1)$. Le terme $s-1$, dans l'écriture de $n_1(k)$, provient du fait que $\mu_k \leq s-1$, alors que $\mu_j \leq s$, pour $j \geq k+1$, quand $i = k$.

Cas 2 : Si $i = k-1$, on a

$$q^k n + r = v q^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j + \sum_{j \geq k} \mu_j q^j - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = -r + v q^{k-1} + \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j,$$

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{l \geq k} \mu_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \tag{8}$$

$$\text{avec } \mathcal{S} = -r + v q^{k-1} + \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-3))q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j.$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (8), n vérifie l'inégalité $n \geq n_2(k)$, avec

$$n_2(k) = s(1 + ... + q^{x_2(k)-1}) + y_2(k)q^{x_2(k)},$$

où $x_2(k)$ et $y_2(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité
$-r + q^{k-1} - (q-3)(q^{k-2} + ... + q) - s$.

Écrivons v en base q : $v = v_0 + ... + v_d q^d$ avec $0 \leq v_i \leq q-1$ et $v_d \neq 0$.

Nous allons distinguer les cas , non plus selon la valeur de λ, comme au paragraphe 4, mais selon la valeur de la quantité $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda$, en posant, pour $d = 0$, $v_1 + ... + v_d q^{d-1} = 0$.

Notons que si $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda \leq -1$, on obtient, comme $\mu_j \leq s-1 \leq q-4$, pour $1 \leq j \leq k-1$:

$$\mathcal{S} \leq -r - q^k + v_0 q^{k-1} - (q^{k-1} + ... + q) < 0.$$

Nous allons donc supposer que $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 0$.

- Supposons que $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 1$. On a alors

  $$\mathcal{S} \geq -r + (v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda)q^k + v_0 q^{k-1} - (q-3)(q + ... + q^{k-1}).$$

  Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (8) avec $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 1$, on obtient :

  $$n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{x_2'(k)-1}) + y_2'(k)q^{x_2'(k)},$$

  où $x_2'(k)$ et $y_2'(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité
  $-r + (v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda)q^k + v_0 q^{k-1} - (q-3)(q + ... + q^{k-1})$. Or on vérifie que $n_2(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{x_2'(k)-1}) + y_2'(k)q^{x_2'(k)}$.

- Supposons donc $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$ et $\mathcal{S} \geq 0$. On a alors

  $$\mathcal{S} = -r + v_0 q^{k-1} + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-3))q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j.$$

  On a nécessairement $v_0 + \mu_{k-1} - (q-3) \geq 1$, sinon $\mathcal{S} < 0$. Par conséquent, si l'on suppose $v_0 + \mu_{k-1} - (q-3) \geq 1$, on obtient, comme $\mu_{k-1} \leq s$:

  $$\mathcal{S} \geq -r + q^{k-1} - (q-3)(q + ... + q^{k-2}) - s.$$

  La condition $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$ implique, de plus, que $\lambda \leq 0$. Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (8), avec $v_1 + ... + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$, n vérifie $n \geq n_2(k)$.

Nous avons donc montré, dans ces deux cas , l'inégalité $n \geq n_2(k)$, pour n vérifiant (8).

Cas 3 : Si $1 \leq i \leq k-2$, on a

$$q^k n + r = q + ... + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j + \sum_{l=k}^{+\infty} \mu_l q^l - \sigma.$$

On en déduit que

$$\sigma = -r + \lambda q^k + q + ... + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j,$$

$$\text{avec } \lambda = -n + \sum_{l \geq k} \mu_l q^{l-k}.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \sum_{l \geq k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j<k} \mu_j \\ &= -r + \lambda q^k + q + ... + q^i + v q^i + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (9), n vérifie l'inégalité $n \geq n_3(k)$, avec

$$n_3(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x_3(k)-1}) + y_3(k) q^{x_3(k)},$$

où $x_3(k)$ et $y_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité

$$\begin{cases} -r + q^k - (q-2)(q^{k-1} + ... + q^2) + (v - (q-3))q & \text{si } d = 0, \\ -r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + ... + q) - s(d+1) & \text{si } d \neq 0. \end{cases}$$

Nous allons raisonner, ici encore, selon les valeurs prises par λ.

- Supposons $\lambda \geq 1$. On a alors

  $$\mathcal{S} \geq -r + \lambda q^k - (q-2)(q^{k-1} + ... + q^2) + (v + 1 - (q-2))q.$$

  Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (9) avec $\lambda \geq 1$, on obtient :

  $$n \geq -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)},$$

  où $x'_3(k)$ et $y'_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité
  $-r + \lambda q^k - (q-2)(q^{k-1} + ... + q^2) + (v - (q-3))q$. Or on vérifie que
  $n_3(k) < -\lambda + s(1 + ... + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)}$.

- Supposons donc $\lambda \leq 0$.

  Notons que si $\lambda q^k + vq^i < q^{k-1}$, on a alors $\mathcal{S} < 0$. On a, en effet,[3]

  $$\mathcal{S} < -r - (q + ... + q^{k-1}) + \lambda q^k + vq^i < 0.$$

  Or pour $d = 0$ et $\lambda \leq 0$, on a toujours $\lambda q^k + vq^i + < q^{k-1}$, car $i \leq k-2$. Par conséquent, si $d = 0$ et si $\mathcal{S} \geq 0$, on ne peut pas avoir $\lambda \leq 0$.

  Supposons donc que $\lambda q^k + vq^i \geq q^{k-1}$. Ceci implique que $i \geq k - d - 1$, car on a supposé $\lambda \leq 0$.

  On a alors, soit $\lambda q^k + (v+1)q^i + \sum_{j \geq i} (\mu_j - (q-2))q^j \leq 0$, auquel cas on a $\mathcal{S} < 0$,

  soit $\lambda q^k + (v+1)q^i + \sum_{j \geq i} (\mu_j - (q-2))q^j \geq q^i$. On obtient, dans ce dernier cas,

  $$\mathcal{S} \geq -r + q^i - (q-3)(q^{i-1} + ... + q) - \sum_{i \leq j \leq k-1} \mu_j.$$

  Or $i \geq k - d - 1$ et $\sum_{i \leq j \leq k-1} \mu_j \leq s(k-1-i) + (s-1) \leq s(d+1)$. Par conséquent,

  $$\mathcal{S} \geq -r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + ... + q) - s(d+1).$$

  On a, de plus, supposé $\lambda \leq 0$. Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (9), avec $\lambda \leq 0$, on obtient $n \geq n_3(k)$.

Nous avons donc montré, dans tous les cas , l'inégalité $n \geq n_3(k)$, pour n vérifiant (9).

Il reste à comparer les quantités $n_1(k)$, $n_2(k)$ et $n_3(k)$. On a, si $d \geq 1$, $n_1(k) > n_2(k) > n_3(k)$, et si $d = 0$, $n_1(k) > n_3(k) > n_2(k)$. Soit $n^v(k) = n_3(k)$, si $d \geq 1$ et $n^v(k) = n_2(k) - 1$, si $d = 0$. On a donc montré que pour tout $n < n_v(k)$: $g^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) = 0$, avec $n^v(k) = -1 + s(1 + ... + q^{x(k)-1}) + y(k)q^{x(k)}$, où $x(k)$ et $y(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de $-r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + ... + q) - s(d+1)$, ce qui achève la preuve du lemme 4.

6 Non-nullité des suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})))_{n \in \mathbf{N}}$

Nous allons construire un entier $n_0(k)$ tel que l'on ait $E(q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$, pour une infinité de k. Nous allons définir cet entier $n_0(k)$ au

[3]Dans cette majoration, intervient la condition $s \leq q-3$. L'inégalité ainsi obtenue, $\lambda q^k + vq^i \geq q^{k-1}$ (c'est-à-dire $i \geq k-d-1$), est essentielle pour montrer que $n \geq n_3(k)$.

paragraphe 6.1, puis nous allons montrer, en posant $N_0(k) = q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$, que $F(N_0(k)) \neq 0$, en 6.2, puis que $G(N_0(k)) = 0$, en 6.3. On en déduira que $E(N_0(k)) \neq 0$ et donc que les sous-suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})))_{n\in\mathbf{N}}$ sont non nulles pour une infinité de k.

6.1 Construction de l'entier $n_0(k)$

Soit v le plus petit indice w tel que $p_w \neq 0$.
Considérons n tel que $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})) \neq 0$. On a vu, au paragraphe 4, qu'un tel n s'écrit sous la forme

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \sum_{l\geq k}\mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \text{ avec } 0 \leq \mu_l \leq s, \text{ pour tout } l,$$

$$\text{et } \mathcal{S} = \lambda q^k + v - r + \sum_{j=1}^{k-1}(\mu_j - (q-2))q^j - \sum_{j=1}^{k-1}\mu_j.$$

Posons $\lambda = 1$ et $\mu_l = 0$, pour $1 \leq l \leq k-1$. On a alors

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_k = -r + q^k + v - (q-2)(q^{k-1} + ... + q).$$

On peut trouver $1 \leq r \leq s$ tel que pour une infinité de k, $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s. Nous allons donc fixer ainsi la valeur de r et supposer, pour la suite, k à valeurs dans un ensemble infini et tel que $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s.

On a, de plus, $\mathcal{S}_k \geq s$. Il existe donc un entier M_k tel que $\mathcal{S}_k = s(M_k+1)$. On définit alors $n_0(k) = -1 + s\sum_{j=0}^{M_k} q^j$. Soit $N_0(k) = q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + ... + q^{k-1})$.

On pose $N_k = M_k + k$. On a alors $N_0(k) = v + s\sum_{j=k}^{N_k}(q^j - 1)$.

6.2 Preuve de la non-nullité de $F(N_0(k))$

Soit w tel que $p_w \neq 0$. On a donc $w \geq v$. Supposons que $f^w(N_0(k)) \neq 0$. Soit $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$, si $v \geq 1$ et $d = 0$, sinon. On définit, de même, $\Delta = [\frac{\ln w}{\ln q}]$, si $w \geq 1$ et $\Delta = 0$, sinon. On a $d \leq \Delta$.

D'après la proposition 3.1, il existe

$$(\mu_i)_{i\in\mathbf{N}} \text{ avec } \mu_i \in \{0, ..., s\}, \mu_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand, tels que}$$

$$N_0(k) = w + \sum_{i=1}^{+\infty}\mu_i(q^i - 1). \qquad (10)$$

Or $N_0(k) = v + s\sum_{j=k}^{N_k}(q^j - 1)$. On a donc

$$w + \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i(q^i - 1) = v + s\sum_{j=k}^{N_k}(q^j - 1).$$

On a alors égalité des coefficients d'indice supérieur à k, d'après le lemme 1. En effet, pour k assez grand, on a $k > \Delta + 1 \geq d + 1$ et

$$\begin{cases} w + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(q^i - 1) \leq (q-1)(q^{k-1} - 1) \\ v \leq (q-1)(q^{k-1} - 1). \end{cases}$$

Par conséquent, on est ramené à l'égalité suivante :

$$v = w + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(q^i - 1).$$

Or $v \leq w$. On a donc $v = w$ et $\mu_i = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$.

On en déduit , d'une part, que pour $v = w$, il y a unicité de la décomposition de $N_0(k)$ sous forme (10) et par conséquent, que $f^v(N_0(k)) \neq 0$, d'après la proposition 3.3. Pour $w \neq v$, on a, d'autre part, $f^w(N_0(k)) = 0$. En conclusion, on a : $F(N_0(k)) \neq 0$.

6.3 Preuve de la non-nullité de $G(N_0(k))$

Soit w tel que $p_w \neq 0$. Supposons que $g^w(N_0(k)) \neq 0$. Soit $\Delta = [\frac{\ln w}{\ln q}]$, si $w \geq 1$ et $\Delta = 0$, sinon.
On a, d'après la proposition 3.2,

$$N_0(k) = q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1), \tag{11}$$

avec $i \geq 1,\ 0 \leq \mu_j \leq s - 1$, pour $1 \leq j \leq i$ et $0 \leq \mu_j \leq s$, pour $j \geq i + 1$.

Considérons une telle écriture. On a alors l'égalité suivante :

$$q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1) = v + s\sum_{j=k}^{N_k}(q^j - 1).$$

On a vu, au paragraphe 5, cas 1, que si $i \geq k$, alors

$$q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j(q^j - 1) \geq q^k n_1(k) + r + (q-2)(q + .. + q^{k-1}),$$

avec

$$n_1(k) = v + (s-1) + s(q + ... + q^{x_1(k)}) + y_1(k)q^{x_1(k)+1},$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $q^k - r - (q-3)(q + ... + q^{k-1}) - (s-1)$. Or, pour k assez grand , on a :

$$q^k - r - (q-2)(q + ... + q^{k-1}) + v < q^k - r - (q-3)(q + ... + q^{k-1}),$$

c'est-à-dire $n_0(k) < n_1(k)$. On ne peut donc pas avoir $N_0(k) \geq q^k n_1(k) + r + (q-2)(q + .. + q^{k-1})$, ni, a fortiori, $i \geq k$.

Nous allons distinguer deux cas selon les valeurs prises par i, avec $i \leq k-1$, et montrer qu'ils aboutissent tous deux à une contradiction.

- Supposons $i + \Delta + 1 \leq k - 1$.

  On a donc $q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j(q^j - 1) \leq (q-1)(q^{k-1} - 1)$.

  D'après le lemme 1, on est alors ramené à l'égalité suivante :

  $$v = q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j(q^j - 1),$$

  ce qui est impossible car $v \leq w$.

- Supposons donc $k - \Delta - 1 \leq i \leq k - 1$.

  On a, pour k assez grand, $i + \Delta + 1 \leq N_k$. On est, d'après le lemme 1, ramené à l'égalité entre les deux expressions suivantes :

  $$v + s(q^k - 1) + ... + s(q^{i+\Delta+1} - 1)$$

  $$q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{i+\Delta+1} \mu_j(q^j - 1).$$

  On a, pour i assez grand, donc pour k assez grand : $q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) \geq 0$

  et $q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j \geq 0$. En ajoutant q^{i-2} aux deux membres, on obtient alors une nouvelle égalité entre les deux expressions suivantes :

  $$v + q^{i-2} - (s(i + \Delta + 2 - k)) + sq^k + ... + sq^{i+\Delta+1} \tag{12}$$

  $$q + ... + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j(q^j - 1) + (q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j) + \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j q^j. \tag{13}$$

On a, de même, pour k assez grand :

$$\begin{cases} v + q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) < q^i \\ q + ... + q^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j(q^j - 1) + (q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j) < q^i. \end{cases}$$

Effectuons alors la division euclidienne de (12) et de (13) par q^i. On a, d'après l'unicité du reste :

$$v+q^{i-2}-(s(i+\Delta+2-k)) = q+...+q^{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1}\mu_j(q^j-1)+(q^{i-2}-\sum_{j=i}^{i+\Delta+1}\mu_j).$$

Or, pour k assez grand :

$$v + q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) < q^{i-1}$$

et

$$q + ... + q^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j(q^j - 1) + (q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j) \geq q^{i-1}.$$

On obtient ici encore une contradiction.

On ne peut donc pas avoir de décomposition de $N_0(k)$ sous la forme (11) et par conséquent, $G(N_0(k)) = 0$.

Bibliographie

[1] J.-P. ALLOUCHE *Sur la transcendance de la série formelle* Π, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux **2** (1990), 103–117.

[2] V. BERTHÉ *De nouvelles preuves "automatiques" de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz*, Astérisque **209** (1992), 159–168.

[3] V. BERTHÉ *Fonction zêta de Carlitz et automates*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 53–77.

[4] L. CARLITZ *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), 137–168.

[5] H. CHÉRIF *Mesure d'irrationalité de valeurs de la fonction zêta de Carlitz sur* $\mathbf{F}_q[T]$*,* C. R. Acad. Sci. Paris **310, Série I** (1990), 23–26.

[6] H. CHÉRIF et B. de MATHAN *Irrationality measures of Carlitz zeta values in positive characteristic*, J. Number Theory **44** (1993), 260–272.

[7] H. CHÉRIF et B. de MATHAN *Mesure d'irrationalité de la valeur en* 1 *de la fonction zêta de Carlitz, relative à* $\mathbf{F}_2(T)$, C. R. Acad. Sci. Paris **305, Série I** (1987), 761–763.

[8] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDÈS FRANCE et G. RAUZY *Suites algébriques, automates et substitutions,* Bull. Soc. math. France **108** (1980), 401–419.

[9] G. DAMAMME *Irrationalité de* $\zeta(s)$ *dans le corps des séries formelles* $\mathbf{F}_q((\frac{1}{t}))$, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9,5** (1987), 207–212.

[10] G. DAMAMME *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade,* Thèse, Caen, 1990.

[11] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Transcendance of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method,* J. Number Theory **39** (1991), 257–278.

[12] G. DAMAMME et Y. HELLEGOUARCH *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz,* C. R. Acad. Sci. Paris **307, Série I** (1988), 635–637.

[13] L. DENIS *Communication personnelle.*

[14] V. G. DRINFELD *Elliptic modules*, Mat. Sbornik **94**, (1974), 594–627 ; trad. angl. : Math. USSR Sbornik **23** (1974), 561–592.

[15] E. U. GEKELER *Drinfeld modular curves*, Springer Lecture Notes in Math. **1231** (1986).

[16] F. RECHER *Propriétés de transcendance de séries formelles provenant de l'exponentielle de Carlitz*, C. R. Acad. Sci. Paris **315, Série I** (1992), 245–250.

[17] D. S. THAKUR *Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules,* Ph. D. Thesis, Harvard (1987).

[18] D.S. THAKUR *Number fields and function fields*, N. De Grande-De Kimpe, L. Van Hamme (eds), Proc. conf. on p-adic analysis, Hengelhoef 1986, 149–157, publi. Vrije Universiteit, Brussels.

[19] L.J. WADE *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$, Duke Math. J. **8** (1941), 701–720.

[20] L.J. WADE *Transcendence properties of the Carlitz* ψ*-function*, Duke Math. J. **13** (1946), 79–85.

[21] M. WALDSCHMIDT *Transcendence problems connected with Drinfeld modules*, Istanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. **49** (1990), 57–75.

[22] J. YU *Transcendence and Special Zeta Values in Characteristic p,* Annals of Mathematics **134** (1991), 1–23.

[23] J. YU *Transcendental numbers arising from Drinfeld modules*, Mathematika **30** (1983), 61–66.

[24] J. YU *Transcendental theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517–527.