

TD diagonalisation

1. **Le barbier** du village rase tous les habitants qui ne se rasent pas et seulement ces habitants. Est-ce qu'il se rase? *Formaliser en utilisant le prédicat $R(x,y)$. Comparer avec la preuve de l'indécidabilité du problème K . Réfléchir est-ce qu'il se rase vraiment.*
2. **Une fonction partielle qu'on ne peut pas compléter.** On considère la fonction suivante:

$$f(x) = \varphi_x(x) + 1.$$

Montrer que:

- (a) f est récursive partielle.
- (b) il n'existe pas de fonction récursive totale g qui prolonge f , c'est-à-dire telle que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \downarrow \\ \text{valeur arbitraire} & \text{si } f(x) \uparrow \end{cases}$$

3. Montrer qu'il n'existe pas d'énumération effective de fonctions récursives totales, c'est à dire d'une liste $h_1(x), h_2(x), \dots$ telle que:
 - (a) chaque fonction $h(x)$ est récursive totale;
 - (b) chaque fonction récursive totale est dans la liste;
 - (c) la fonction $V(i,x) = h_i(x)$ est calculable.

Pourquoi une telle énumération est possible pour les fonctions récursives partielles?