Automates avancés

Master 1 II et MI

Devoir surveillé du 20 mars 2008 (8h30-10h30)
Documents autorisés : notes manuscrites; le barème est indicatif;
le sujet est recto-verso.

1 Application des cours $\boxed{6}$

1. Construisez un BDD (ordonné réduit) pour la fonction $G : \{0,1\}^8 \to \{0,1\}$ définie comme suit
$$G(x_1, \ldots, x_8) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. Donnez une formule MSO définissant le langage $\{w \in \{a,b\}^* \mid \#a \text{ est pair}\}$. *Indication: vous pouvez passer par un automate*
3. Démontrez que ce même langage ne peut pas être défini par une formule de premier ordre (en admettant les théorèmes sur les langages apériodique énoncés en cours).

2 Une petite étude théorique : Presburger contre Peano $\boxed{8}$

L'objectif de cet exercice consiste à comparer l'expressivité de l'arithmétique de Presburger (avec addition seulement) et celle de Peano (avec addition et multiplication).

On introduit plusieurs prédicats sur les entiers naturels :

Central pour cette étude : le prédicat $A(x)$ sur les entiers, qui représente la propriété *x est la somme d'une puissance de 2 supérieure à 1 et de son carré* .

Vu en TD : $P_2(x)$ (*x est une puissance de 2*).

Auxiliaire : $C(x,y)$ qui signifie que $x = y^2$ (*x est le carré de y*).

Objectif final : le prédicat $Mult(x,y,z)$ qui signifie que $x = y \times z$.

On rappelle que dans le cours on a associé à chaque prédicat n-aire Q sur les entiers naturels un langage L_Q dans l'alphabet $\{0,1\}^n$.

1. On a vu en TD que le le langage L_P associé au prédicat $P_2(x)$ est régulier. Donnez l'automate qui reconnaît ce langage.
2. Exprimez $A(x)$ par une formule $\varphi_A(x)$ dans l'arithmétique de Presburger augmentée des prédicats $P_2(x)$ et $C(x,y)$.
3. Décrivez le langage L_A associé au prédicat A défini ci-dessus.
4. Le langage L_A est-il régulier ? Justifiez votre réponse par la méthode de votre choix.
5. Sans le construire, que pouvez-vous en déduire quant au langage L_C ? Le prédicat C est-il exprimable en arithmétique de Presburger ?
6. Déduisez-en si le prédicat *Mult* est exprimable en arithmétique de Presburger. Comparez le pouvoir expressif de l'arithmétique de Presburger et de celle de Peano.

3 Un vrai théorème $\boxed{10}$

L'objectif de cet exercice consiste à démontrer le résultat suivant, énoncé sans preuve en cours. On cherche une preuve directe sans passer par les expressions sans étoile.

Théorème 1 *Chaque langage défini par une formule close de premier ordre (dans la logique* $\mathrm{FO}(<, \Sigma)$*) est apériodique.*

1. Rappelez les définitions d'une formule de $\mathrm{FO}(<, \Sigma)$ et d'une formule close.
2. On associe à chaque formule f de premier ordre (pas nécessairement close) un langage $L(f)$ selon la méthode habituelle vue en cours. Pour vous rappeler de la méthode décrivez les langages $L(f)$ et $L(g)$ associés aux formules

$$f = a(x) \wedge b(y) \wedge x < y; \qquad g = \exists x \exists y (a(x) \wedge b(y) \wedge x < y)$$

   en précisant les alphabets.
3. On suggère de démontrer que $L(f)$ est toujours apériodique. Donnez un plan détaillé de preuve (il faut prouver ça, ça et ça) en énumérant systématiquement les cas de base et les cas inductifs.
4. Démontrez tous les cas de base.
5. Démontrez le cas inductif pour les opérations booléennes.
6. Démontrez le cas inductif pour la quantification existentielle. Pour simplicité considérez le cas où le quantificateur porte sur la seule variable libre (et on obtient à la fin une formule close). Votre preuve peut commencer comme ceci :

   L'hypothèse inductive dit que ...
   Soit $k = \ldots$, supposons que $uw^k v \in L(\exists x f)$. Cela signifie qu'un mot de forme ... appartient à $L(f)$. Pour appliquer l'hypothèse inductive on remarque que ....