Langages formels, calculabilité et complexité
TD9

28 novembre 2014

Exercice 1 Fonction d'Ackermann (*avancé*)

1. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f il existe un k et un M tel que $f(x_1,\ldots,x_d) \leq 2 \uparrow^k m$ si $m \geq M$ où $m = \max\{x_1,\ldots,x_d\}$.
2. Conclure que la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.

Exercice 2 Machines de Turing (*base*)

Décrire une machines de Turing pour les fonctions suivantes :

1. $(x,y) \mapsto x \cdot y$
2. $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

Exercice 3 Équivalence de modèles (*base*)

– Une *machine à k piles* est une machine de Turing avec une bande d'entrée et k bandes de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des piles ;
– une *machine à file* est une machine de Turing avec une bande d'entrée et une bande de travail, où la bande de travail est remplacée par une file : on peut ajouter des éléments par la gauche et les lire par la droite ;
– une *machine à k compteurs* est une machine à k piles où l'alphabet de pile est $\{B,Z\}$ et Z est un symbole de fond de pile. Un entier i peut-être stocké dans une pile en comptant le nombre de symboles B. On peut incrémenter, décrémenter le compteur et tester si le compteur est vide (symbole Z en tête de pile).

1. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux piles.
2. Montrer qu'une de Turing est équivalente à une machine à une file.
3. Montrer qu'une machine à une pile peut-être simulée par une machine à deux compteurs.
4. Montrer qu'une machine de Turing est équivalente à une machine à deux compteurs.

Exercice 4 Quines (*avancé*)

Pour chaque mot $w \in \Sigma^*$, soit M_w une machine de Turing sur Σ qui écrit le mot w sur le ruban. Pour deux machines de Turing A et B sur Σ, soit $A \cdot B$ une machine de Turing sur Σ qui exécute machine B après avoir exécuté machine A.

1. Expliquer pourquoi la fonction $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$q(n) = \begin{cases} \langle M_w \rangle & \text{si } n = \langle w \rangle \text{ avec } w \in \Sigma^* \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

   est récursive.

2. Expliquer pourqoui la fonction $s_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$,

$$s_2(m,n) = \begin{cases} \langle A \cdot B \rangle & \text{si } m = \langle A \rangle \text{ et } n = \langle B \rangle \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

est récursive.

3. Montrer qu'il existe une machine de Turing M qui écrit $\langle M \rangle$ sur le ruban.